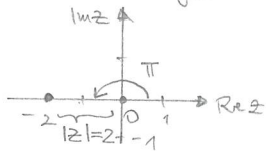
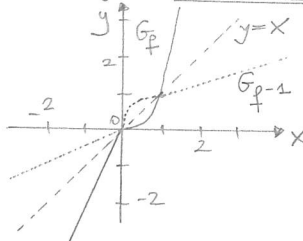


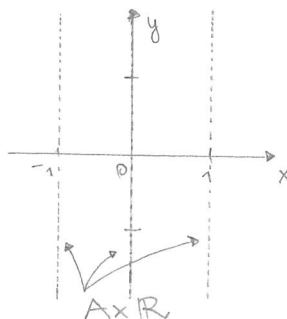
Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2017/2018 - Trento, 3 luglio 2018

FILA (A): a1) $\log_2(x+1) \leq 1 \Leftrightarrow \log_2(x+1) \leq \log_2 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{S =]-1, 1]}. \square$

a2) $z = -2$  $\underline{z = 2(\cos \pi + i \sin \pi)}. \square$

a3) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}$ $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\} = \underline{]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}. \square$

a4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ x^3 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$  $\square$

a5) $A = \{-1, 0, 1\}$  $\square$

a6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n^2+1)}{\log n} = \underline{2}$; infatti $\frac{\log(n^2+1)}{\log n} = \frac{\log[n^2(1+\frac{1}{n^2})]}{\log n} = \frac{2 \log n + \log(1+\frac{1}{n^2})}{\log n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2. \square$

a7) $f(x) = e^{2x^2-x} - 2$ è una funzione continua su $[0, 1]$; inoltre $f(0) = -1 (< 0)$ e $f(1) = e - 2 (> 0)$.

Quindi f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[0, 1]$. $\square$

a8) $f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ per $x \rightarrow 1$.

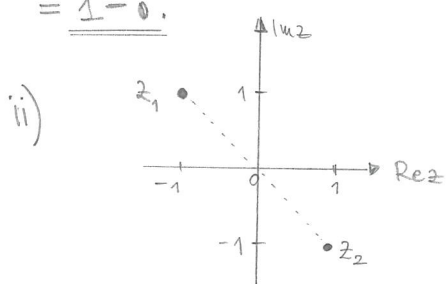
Allora segue $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ e $\frac{f''(1)}{2} = -\frac{1}{2}$ e quindi $\underline{f''(1) = -1}. \square$

a9) $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$. Allora $\underline{F(x) = -\arctan(\cos x)}$ è una primitiva di $f(x)$, poiché $F'(x) = -\frac{(\cos x)'}{1 + (\cos x)^2} = f(x) \forall x \in \mathbb{R}. \square$

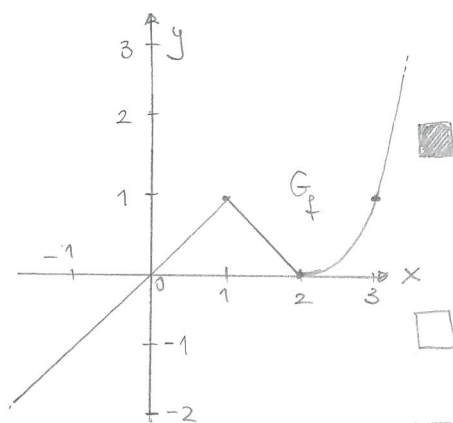
a10) $F(x) = \int_{-2}^x (|t|-1) dt$ è derivabile (teor. fond. del calcolo integrale) e $\underline{F'(x) = |x|-1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \square}$

Ipt. critici di $F(x)$ sono quindi le sol. di $|x|-1=0$, ossia $\underline{x = \pm 1}. \blacksquare$

b1) i) Abbiamo $2 + iz = z(iz + i)$, ossia $2 + i/z = iz^2 + i/z$, da cui $z^2 = -2i$. Possiamo risolvere quest'equazione ponendo $z = x + iy$ oppure osservando semplicemente che dobbiamo trovare le due radici complesse del nr. complesso $-2i$. Procediamo con quest'ultimo approccio. Allora osserviamo che $z^2 = -2i$ si scrive equiv. $z^2 = 2(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$. Le soluzioni di $z^2 = -2i$ risultano allora $\underline{z_1} = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}) = \underline{-1 + i}$ e $\underline{z_2} = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}) = \underline{1 - i}$. □



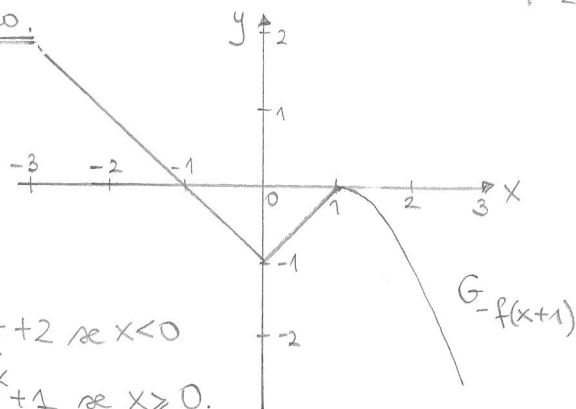
b2) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 1 - |x-1| & \text{se } x < 2 \\ (x-2)^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$



ii) $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 1\} = \underline{\underline{\{1\} \cup [3, +\infty[}}$

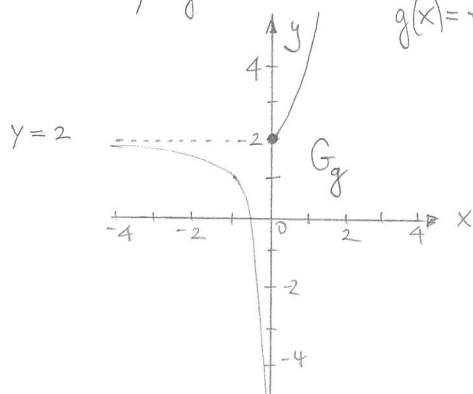
A non è un intervallo.

iii) $x \mapsto -f(x+1)$



iv) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 2 & \text{se } x < 0 \\ e^x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$



Facendo un grafico qualitativo di g si osserva subito che $g(x) < 2$ se $x < 0$ e $g(x) \geq 2$ se $x \geq 0$; quindi

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= \begin{cases} 1 - |(\frac{1}{x} + 2) - 1| & \text{se } x < 0 \\ ((e^x + 1) - 2)^2 & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - |\frac{1}{x} + 1| & \text{se } x < 0 \\ (e^x - 1)^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

b3) i) $f(x) = |x| - 2 \arctan x$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

$$= \begin{cases} -x - 2 \arctan x & \text{se } x < 0 \\ x - 2 \arctan x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• Osservando che $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, si capisce immediatamente che

$y = -x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} = -x + \pi$ è asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow -\infty$, e

$y = x - 2 \cdot \frac{\pi}{2} = x - \pi$ è asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$.

A tali conclusioni si arriva facilmente anche procedendo

come di solito calcolando $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a = -1 \text{ e} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \pi \end{cases}$

da cui segue che $y = -x + \pi$ è asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow -\infty$, e analog. per $x \rightarrow +\infty$.

- f è continua su tutto $\mathbb{R}$, essendo composizione e somma di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

Per la presenza di $|x|$ dobbiamo indagare la derivabilità/non derivabilità di f in $x=0$. Notiamo che

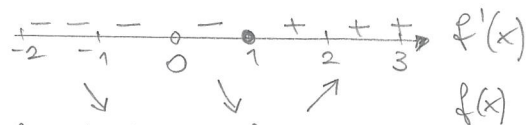
$$f'(x) = \begin{cases} -1 - \frac{2}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \\ 1 - \frac{2}{1+x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-x^2-3}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x^2-1}{1+x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x=0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -1$,

dal collaudo di de l'Hôpital segue che $f'_-(0) = -3$, $f'_+(0) = -1$,

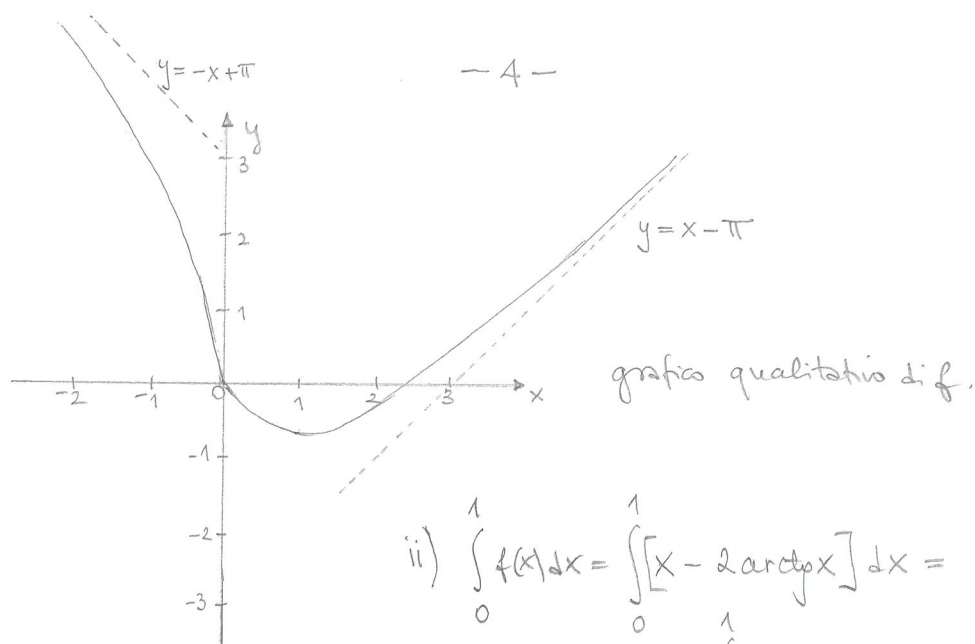
e, in particolare, $x=0$ è un pt. angoloso per f .

- Oss. che $f'(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0$ con $x > 0$ e quindi per $x=1$.



Risulta che $x=1$ è un pt. di univ. loc. stretto per f e

$$f(1) = 1 - 2 \arctan 1 = 1 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2} \approx -0.6$$



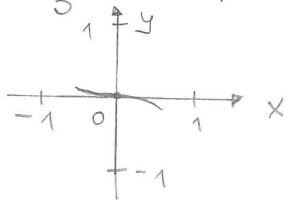
$$\begin{aligned}
 \text{ii) } \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 [x - 2 \arctan x] dx = \\
 &= \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \arctan x dx = \\
 &= \frac{1}{2} - 2 \int_0^1 \underbrace{1 \cdot \arctan x}_{\substack{\text{integrando} \\ \text{per parti}}} dx = \frac{1}{2} - 2 \left[x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} - 2 \left[\arctan 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} - 2 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \Big|_0^1 \right] = \\
 &= \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} + \log 2.}}
 \end{aligned}$$

b4) $f(x) = e^x - 1 + \log(1-x)$ per $x < 1$.

i) Ricordiamo che $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$, e quindi

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - \cancel{1} - \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0 \\
 &= \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Quindi



è il

comportamento di f in un intorno di $x_0 = 0$.

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\sin x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 3 \\ -\frac{1}{6} & \text{se } \alpha = 3 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 3. \end{cases}$$

b5) i) Consideriamo l'eq. diff.

$$(1+x^2)y' + 2xy^2 = 0.$$

Notiamo che $y(x) \equiv 0$ è soluzione dell'eq. diff., ma non soddisfa la condizione $y(0) = 1$. Se $y(x) \neq 0$, allora abbiamo

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -\frac{2x}{1+x^2},$$

da cui
$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x)} dx = -\int \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

Ne segue che
$$-\frac{1}{y(x)} = -\log(1+x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

e quindi
$$y(x) = \frac{1}{\log(1+x^2) + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$ si ottiene l'unica soluzione del problema di Cauchy dato
$$\underline{y(x) = \frac{1}{\log(1+x^2) + 1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
 □

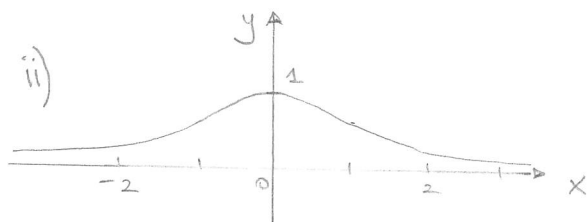


grafico qualitativo di $y(x)$

$y(x)$ è una funzione pari, $y(0) = 1$
crescente in $]-\infty, 0]$ e decrescente in $[0, +\infty[$.

Inoltre
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$



b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. f si dice iniettiva se

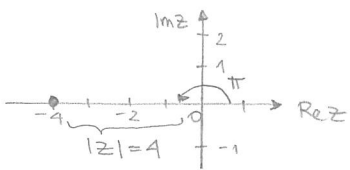
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)] \quad \text{o equivalentemente, se}$$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2].$$



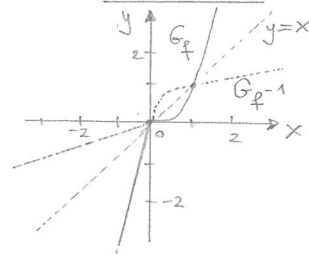
ii) Sapete e provate la formula del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica. ■

FILA (B) : 21) $\log_3(x+1) \leq 1 \Leftrightarrow \log_3(x+1) \leq \log_3 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{S =]-1, 2]}.$ □

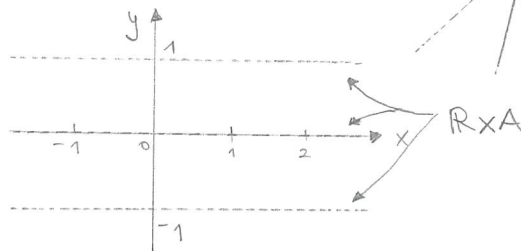
22) $z = -4$  $\underline{z = 4(\cos \pi + i \sin \pi)}.$ □

23) $f(x) = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \underline{\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}}.$ □

24) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x < 0 \\ x^4 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$



25) $A = \{-1, 0, 1\}$



26) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n^3+1)}{\log n} = \underline{3}$; infatti $\frac{\log(n^3+1)}{\log n} = \frac{\log[n^3(1+\frac{1}{n^3})]}{\log n} = \frac{3\log n + \log(1+\frac{1}{n^3})}{\log n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3.$ □

27) $f(x) = 2 - e^{2x-x}$ è una funzione continua in $[0, 1]$; inoltre $f(0) = 1 (> 0)$ e $f(1) = 2 - e (< 0)$.

Quindi f soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri in $[0, 1]$. □

28) $f(x) = -1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ per $x \rightarrow 1$.

Allora segue $f(1) = -1$, $f'(1) = 0$ e $\frac{f''(1)}{2} = \frac{1}{2}$ e quindi $f''(1) = 1$. □

29) $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$. Allora $F(x) = \arctan(\sin x)$ è una primitiva di $f(x)$, poiché $F'(x) = \frac{(\sin x)'}{1 + (\sin x)^2} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

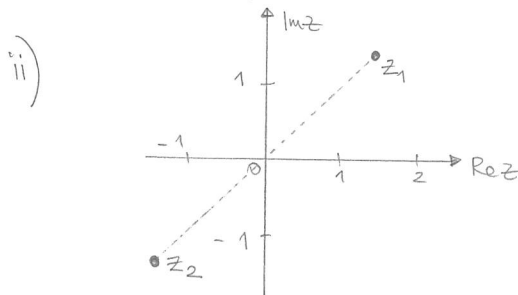
30) $F(x) = \int_{-3}^x (|t| - 2) dt$ è derivabile (teorema fond. del calcolo integrale) e $F'(x) = |x| - 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ □

I pt. critici di $F(x)$ sono quindi le soluzioni di $|x| - 2 = 0$, ossia

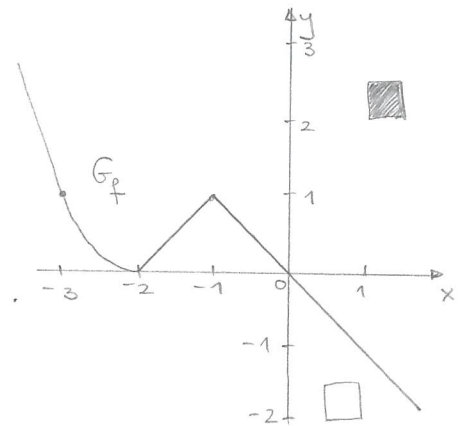
$x = \pm 2$. ■

b1) i) Abbiamo $4 + iz = -z(iz - i)$, ossia $4 + iz = -iz^2 + iz$, da cui $z^2 = 4i$. Possiamo risolvere quest'equazione ponendo $z = x + iy$, oppure osservando semplicemente che dobbiamo trovare le due radici complesse del numero complesso $4i$. Procediamo con quest'ultimo approccio.

Osserviamo che $z^2 = 4i = 4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$. Le soluzioni di $z^2 = 4i$ risultano allora $\underline{z_1} = 2\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\underline{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}}$ e $\underline{z_2} = 2\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\underline{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}}$. □



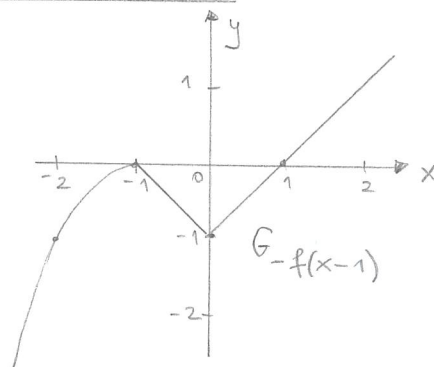
b2) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{se } x < -2 \\ 1 - |x+1| & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$



ii) $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 1\} = \underline{\underline{]-\infty, -3] \cup \{-1\}}}$.

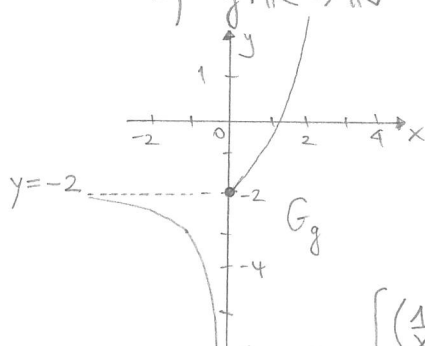
A non è un intervallo.

iii) $x \mapsto -f(x-1)$



iv) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 2 & \text{se } x < 0 \\ e^x - 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

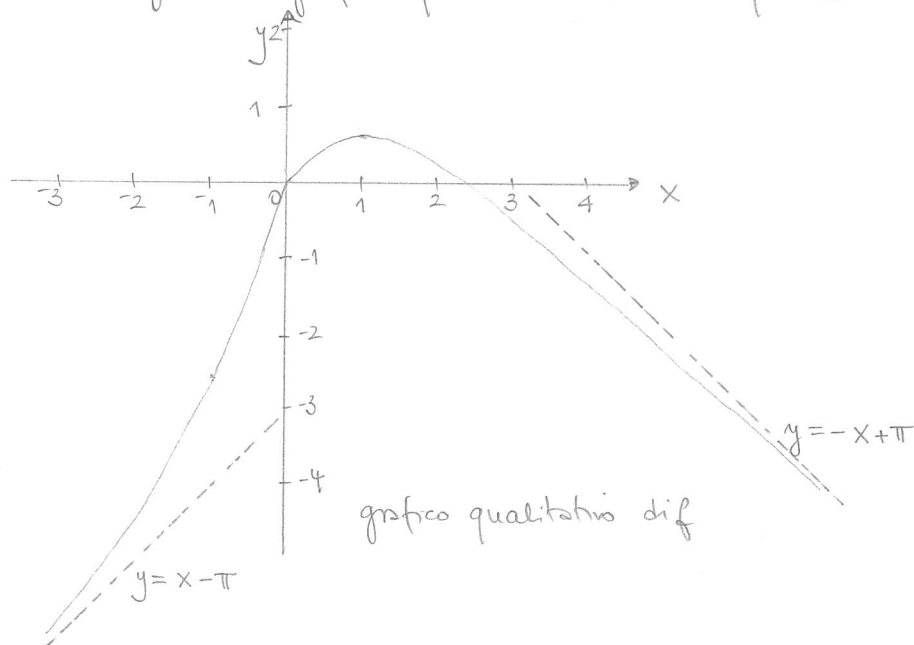


Dal grafico qualitativo di g si osserva subito che $g(x) < -2$ se $x < 0$ e $g(x) \geq -2$ se $x \geq 0$; quindi

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x} - 2 + 2\right)^2 & \text{se } x < 0 \\ 1 - |(e^x - 3) + 1| & \text{se } x \geq 0; \end{cases} = \underline{\underline{\begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ 1 - |e^x - 2| & \text{se } x \geq 0. \end{cases}}}$$

b3) i) $f(x) = 2 \arctan x - |x|$

Questa funzione è uguale alla funzione definita nell'es. b3) FILA (A) solo cambiato di segno. Il grafico qualitativo risulta quindi essere

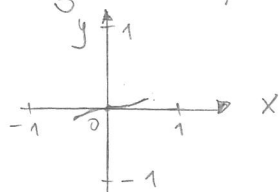


ii) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (2 \arctan x - x) dx = 2 \int_0^1 \arctan x dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 =$
 $= 2 \left[x \arctan x - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \right] - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \log(1+x^2) \Big|_0^1 - \frac{1}{2}$
 Integrando per parti
 $= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \log 2.$

b4) $f(x) = 1 - e^x - \log(1-x)$ per $x < 1$.

i) Ricordiamo che $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$, e quindi
 $f(x) = 1 - \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right] - \left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right]$ per $x \rightarrow 0$
 $= -\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

Quindi



è il

comportamento di f in un intorno di $x_0 = 0$.

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\sin x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 3 \\ 1/6 & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3. \end{cases}$

b5) i) Consideriamo l'eq. diff.

$$(e+x^2)y' + 2xy^2 = 0.$$

Notiamo che $y(x) \equiv 0$ è soluzione dell'eq. diff., ma non soddisfa la condizione $y(0)=1$. Se $y(x) \neq 0$, allora abbiamo

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = -\frac{2x}{e+x^2},$$

da cui
$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x)} dx = - \int \frac{2x}{e+x^2} dx.$$

Ne segue
$$-\frac{1}{y(x)} = -\log(e+x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

e quindi
$$y(x) = \frac{1}{\log(e+x^2)-c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione $y(0)=1$ si ottiene l'unica soluzione del pbn.

di Cauchy dato
$$\underline{y(x) = \frac{1}{\log(e+x^2)}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

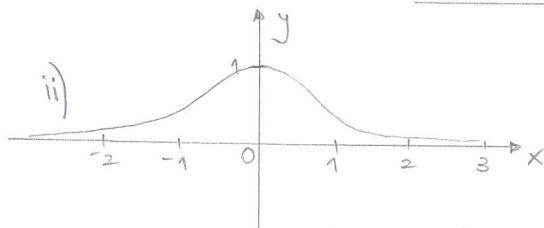


grafico qualitativo di $y(x)$

$y(x)$ è una funzione pari, $y(0)=1$
crescente in $]-\infty, 0]$ e decrescente in $[0, +\infty[$.

Inoltre
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

■

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. f si dice suriettiva su $\mathbb{R}$ se

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, o equivalentemente, se $\forall y \in \mathbb{R}$ esiste $x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x)=y$.

□

ii) Scrivete e provate la formula del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica.

■