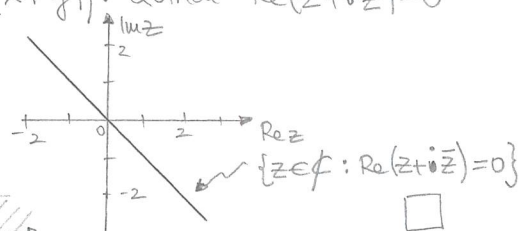


Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 a.a. 2017/2018 - Trento, 6 settembre 2018

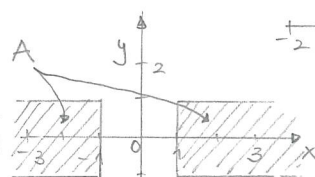
FILA (A):

21) $z = i(2+i)$, ossia $z = -1 + 2i$, per cui $|z| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. $\square$

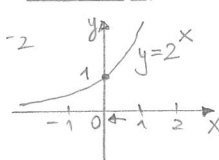
22) $\operatorname{Re}(z + i\bar{z}) = 0$: poniamo $z = x + iy$; allora $\bar{z} = x - iy$ e mi ha $\operatorname{Re}(z + i\bar{z}) = \operatorname{Re}(x + iy + i(x - iy)) = \operatorname{Re}(x + y + i(x + y))$. Quindi $\operatorname{Re}(z + i\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$.



23) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq 1, |y| \leq 1\}$



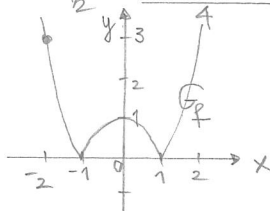
24) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1-2^x)^{-1}}$ infinitesimo negativo per $x \rightarrow 0^+$ $= -\infty$.



25) f è continua in $x_0 = 1 \Leftrightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Quindi deve essere $2a^2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} [a \frac{\sin(x-1)}{x-1} + 1]$, ossia $2a^2 = a + 1$. Ne segue

$2a^2 - a - 1 = 0$, da cui $a_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \in \{-\frac{1}{2}, 1\}$. Quindi $a \in \{-\frac{1}{2}, 1\}$. $\square$

26) $f(x) = |x^2 - 1|$ in $\mathbb{R}$



$\min_{[-2,1]} f = 0$

$\max_{[-2,1]} f = 3$. $\square$

27) $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; poiché $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, mi ha che $y = 3$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$ (e per $x \rightarrow +\infty$). Inoltre, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ (e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$); quindi $x = 1$ è asintoto verticale per f , per $x \rightarrow 1$ da destra (da sinistra). $\square$

28) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$. $\square$

29) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{(x-2)^4}} dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{2}} dx < +\infty \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} < 1 \Leftrightarrow \alpha < 2$. $\square$

30) $y'' + 2y' - 3y = 0$: $z^2 + 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow (z+3)(z-1) = 0 \Leftrightarrow z_1 = -3, z_2 = 1$.
 L'integrale generale dell'eq. diff. data è $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x$, $x \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

b1) Poniamo $\mathcal{P}(n) = \sum_{k=1}^n (3k-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Si ha facilmente che $\mathcal{P}(1)$ è vero (infatti, per $n=1$, si ha " $1=1$ ").

Resta da provare che $\forall n \geq 1$, supposto $\mathcal{P}(n)$ vero, risulta $\mathcal{P}(n+1)$ vero.

Ora

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (3k-2) &= \sum_{k=1}^n (3k-2) + \underbrace{3(n+1)-2}_{\substack{\text{termine (n+1)-esimo} \\ \text{della sommatoria}}} = \frac{n(3n-1)}{2} + 3(n+1)-2 \\ &= \frac{n(3n-1) + 6(n+1) - 4}{2} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \\ &= \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2}, \end{aligned}$$

provando che $\mathcal{P}(n+1)$ è vero. Dal principio di induzione segue quindi che $\mathcal{P}(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. ■

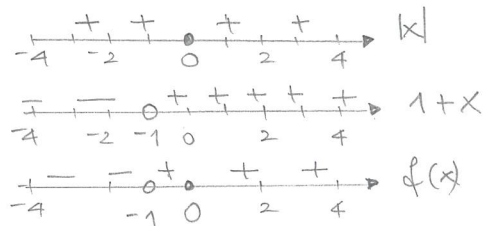
b2) i)

$$f(x) = \frac{|x|}{1+x}$$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

• segno

$$= \begin{cases} \frac{-x}{1+x} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{1+x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{1+x} = -1$

$y = -1$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$

$x = -1$ asintoto verticale per f , per $x \rightarrow 1^-$;

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

$x = -1$ asintoto verticale per f , per $x \rightarrow 1^+$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x} = 1$

$y = 1$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• Oss. che $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x \neq 0$ abbiamo che f è derivabile e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1(1+x) + x}{(1+x)^2} & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1}{(1+x)^2} & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ \frac{1}{(1+x)^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Perché f è continua in $x=0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$,

dal calcolo di de l'Hôpital segue che $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$ e, in particolare, $x=0$ è un pt. angoloso per f . oss. che sono pt. critici per f .

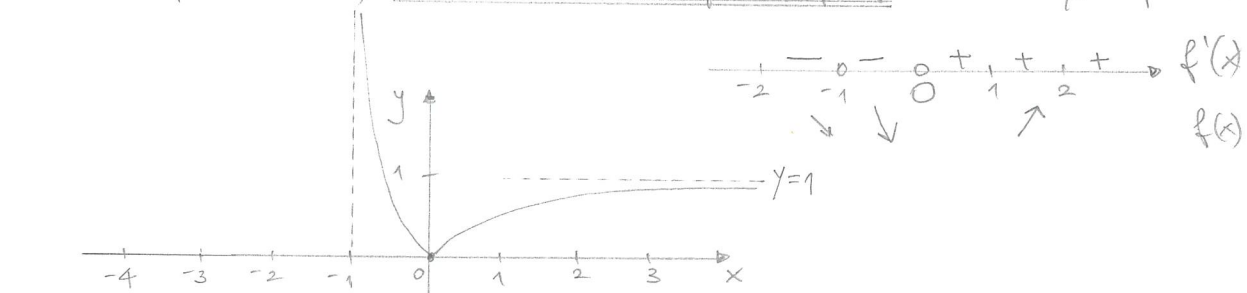


grafico qualitativo di f .



ii) $g(x) = \log f(x)$ è definita $\forall x \in \text{dom} f : f(x) > 0$
quindi $\text{dom} g =]-1, +\infty[\setminus \{0\}$.

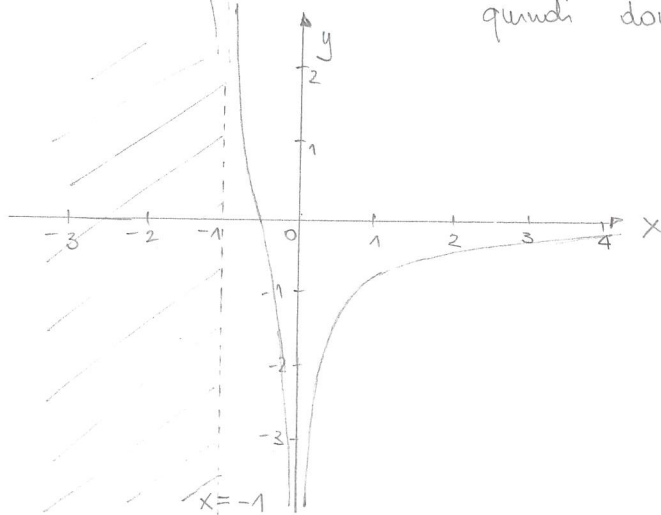


grafico qualitativo della
funzione $g(x)$.



b3) Ricordiamo che $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)$ per $t \rightarrow 0$, per cui
 $\sin(2x) = 2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$. Inoltre $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$
per $t \rightarrow 0$, e quindi $\log(1+4x^2) = 4x^2 - \frac{8x^4}{2} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$.
Risulta allora

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(2x) - \log(1+4x^2) - 4x^4}{x^4} &= \frac{(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4))^2 - 4x^2 + 8x^4 + o(x^4) - 4x^4}{x^4} \\ &= \frac{4x^2 - 4 \cdot \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) - 4x^2 + 8x^4 + o(x^4) - 4x^4}{x^4} \\ &= \frac{\frac{8}{3}x^4 + o(x^4) - 4x^4}{x^4} \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Otteniamo allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(2x) - \log(1+4x^2) - dx^4}{x^4} = \begin{cases} 0 & \text{se } d = \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} - d & \text{se } d \neq \frac{8}{3}. \end{cases}$$

b4) Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int (2+x)e^{-x} dx &= \int 2e^{-x} dx + \int xe^{-x} dx = \\ &= -2e^{-x} + \left[-xe^{-x} + \int e^{-x} dx \right] = \\ &= -2e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= -3e^{-x} - xe^{-x} + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= e^{-x}(-x-3) + c \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (2+x)e^{-x} dx &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[e^{-x}(-x-3) \right]_0^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[e^{-M}(-M-3) + (3) \right] \\ &= \underline{\underline{3}}. \end{aligned}$$

b5) i) $y' = \underbrace{-xy}_{a(x)} + \underbrace{4x}_{b(x)}$ $b(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue

è un'eq. differenziale lineare del primo ordine. Possiamo applicare la formula riduttiva per trovare l'integrale generale dell'eq. differenziale.

Oss. che $A(x) = \int a(x) dx = \int -x dx = -\frac{x^2}{2}$ è una primitiva di $a(x)$.

Allora

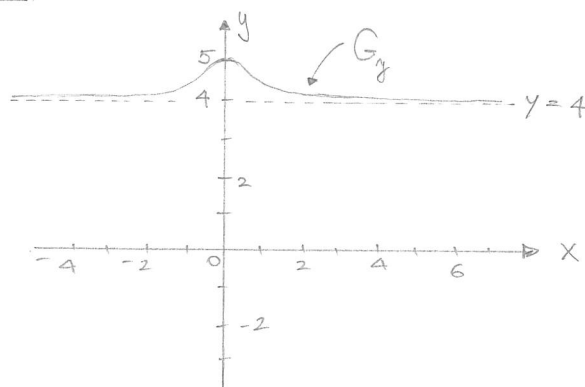
$$\begin{aligned} y(x) &= e^{A(x)} \left(c + \int b(x) e^{-A(x)} dx \right) \quad c \in \mathbb{R} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \left(c + \int 4x e^{\frac{x^2}{2}} dx \right) \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \left(c + 4e^{\frac{x^2}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 4}} \quad c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

ii) Oss. che $y(0)=5 \Leftrightarrow 5=c+4 \Leftrightarrow c=1$.

Quindi l'unica soluzione di i) soddisfacente $y(0)=5$ risulta essere

$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + 4$, $x \in \mathbb{R}$.



iii) Sì! La soluzione costante è data da $y(x) \equiv 4$ su $\mathbb{R}$.
(corrisponde a $c=0$).



b6) i) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice una primitiva di f se F è derivabile in $\mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

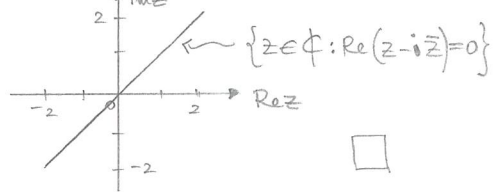


ii) Scrivere l'enunciato e la dimostrazione del criterio del confronto asintotico per serie a termini non-negativi.

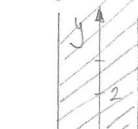


FILA(B) 21) $z = i(i+3)$; ossia $z = -1+3i$, per cui $|z| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$. $\square$

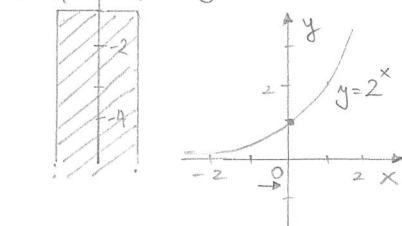
22) $\operatorname{Re}(z - i\bar{z}) = 0$; poniamo $z = x+iy$; allora $\bar{z} = x-iy$ e mi ha $\operatorname{Re}(z - i\bar{z}) = \operatorname{Re}(x+iy - i(x-iy)) = \operatorname{Re}(x+iy - ix - y) = \operatorname{Re}(x-y + i(y-x))$. Quindi $\operatorname{Re}(z - i\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow y=x$



23) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \geq 1\}$

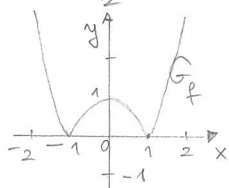


24) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-2^x} = +\infty$.
infinitesimo positivo per $x \rightarrow 0^-$



25) f è continua in $x_0 = 1 \Leftrightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Quindi deve essere $3a^2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[2a \frac{\sin(x-1)}{x-1} + 1 \right]$, ossia $3a^2 = 2a + 1$. Ne segue $3a^2 - 2a - 1 = 0$, da cui $a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} < \frac{1}{-1/3}$. Quindi $a \in \left\{ -\frac{1}{3}, 1 \right\}$. $\square$

26) $f(x) = |x^2 - 1|$ in $\mathbb{R}$



$\min_{[-1,1]} f = 0$

$\max_{[-1,1]} f = 1$. $\square$

27) $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$ in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$; poiché $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, mi ha che $y = 2$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$ (e per $x \rightarrow +\infty$). Inoltre, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ (e $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$); quindi $x = 2$ è asintoto verticale per f , per $x \rightarrow 2$ da destra (da sinistra). $\square$

28) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx = \left[\frac{\sin^4 x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}$. $\square$

29) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^\alpha}} dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{\alpha/3}} dx < +\infty \Leftrightarrow \frac{\alpha}{3} < 1 \Leftrightarrow \alpha < 3$. $\square$

30) $y'' + 3y' - 4y = 0 : z^2 + 3z - 4 = 0 \Leftrightarrow (z+4)(z-1) = 0 \Leftrightarrow z_1 = -4, z_2 = 1$.

L'integrale generale dell'eq. diff. data è $y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

b1) Poniamo $P(n) = \sum_{k=1}^n (3k+2) = \frac{n(3n+7)}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Si ha facilmente che $P(1)$ è vero (infatti, per $n=1$, si ha " $5=5$ ").

Resta da provare che $\forall n \geq 1$, supposto $P(n)$ vero, risulta $P(n+1)$ vero.

Ora

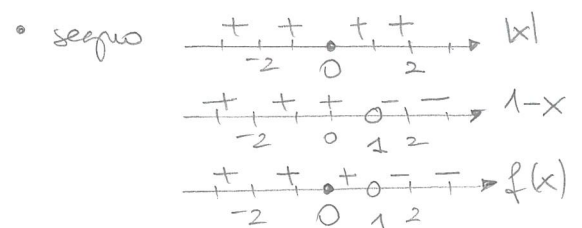
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (3k+2) &= \sum_{k=1}^n (3k+2) + \underbrace{3(n+1)+2}_{\text{termine (n+1)-esimo della sommatoria}} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi} \\ \text{induttiva}}}{=} \frac{n(3n+7)}{2} + 3(n+1)+2 \\ &= \frac{n(3n+7) + 6(n+1) + 4}{2} = \frac{3n^2 + 13n + 10}{2} = \frac{(n+1)(3n+10)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(3(n+1)+7)}{2}, \end{aligned}$$

provando che $P(n+1)$ è vero. Dal principio di induzione segue quindi che $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. ■

b2) i) $f(x) = \frac{|x|}{1-x}$

$$= \begin{cases} \frac{-x}{1-x} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{1-x} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{1-x} = 1$

$y=1$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$

$x=1$

asintoto verticale per f , per $x \rightarrow 1^-$;

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

$x=1$

asintoto verticale per f , per $x \rightarrow 1^+$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

$y=-1$

asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• Oss. che $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $x \neq 0$ abbiamo che f è derivabile e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-(1-x) + x(-1)}{(1-x)^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} & \text{se } x > 0, x \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-1}{(1-x)^2} & \text{se } x < 0, \\ \frac{1}{(1-x)^2} & \text{se } x > 0, x \neq 1. \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x=0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$,

dal collaio di de l'Hôpital segue che $f'_-(0) = -1$, e $f'_+(0) = 1$ e, in particolare, $x=0$ è un pt. angoloso per f . Oss. che $\nexists$ pt. antici per f .

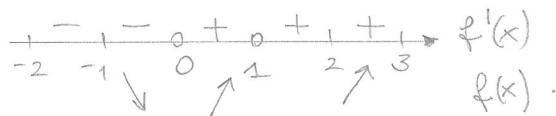
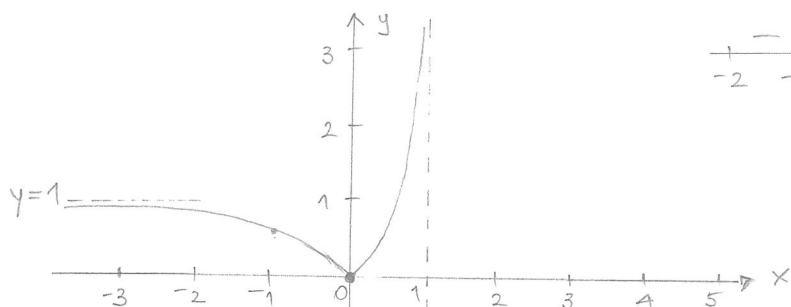


grafico qualitativo di f .

ii) $g(x) = \log f(x)$ è definita $\forall x \in \text{dom} f : f(x) > 0$ □
quindi $\text{dom} g =]-\infty, 1[\setminus \{0\}$.

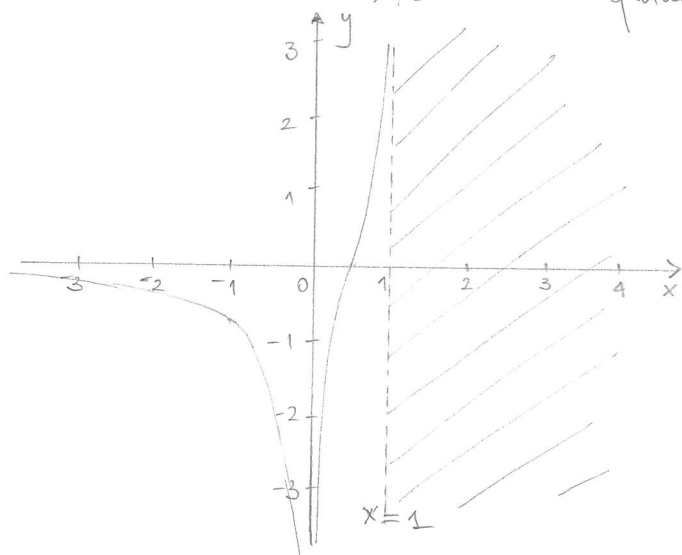


grafico qualitativo di g .

b3) Ricordiamo che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$, per cui
 $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$. Inoltre $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$
per $t \rightarrow 0$, e quindi $\log(1+4x^2) = 4x^2 - \frac{8x^4}{3} + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$.

Risulta allora

$$\begin{aligned} \frac{(e^{-x} - e^x)^2 - \log(1+4x^2) - dx^4}{x^4} &= \frac{\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\right)^2 - 4x^2 + 8x^4 + o(x^4) - dx^4}{x^4} \\ &= \frac{(-2x - \frac{x^3}{3} + o(x^3))^2 - 4x^2 + 8x^4 + o(x^4) - dx^4}{x^4} \\ &= \frac{4x^2 + 4\frac{x^4}{3} + o(x^4) - 4x^2 + 8x^4 + o(x^4) - dx^4}{x^4} \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{28}{3}x^4 + o(x^4) - dx^4}{x^4}.$$

Otteniamo allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{-x} - e^x)^2 - \log(1+4x^2) - dx^4}{x^4} = \begin{cases} 0 & \text{se } d = \frac{28}{3} \\ \frac{28}{3} - d & \text{se } d \neq \frac{28}{3}. \end{cases}$$

b4) Osserviamo che $\int (3-x)e^{-x} dx = \int 3e^{-x} dx - \int xe^{-x} dx$

$$= -3e^{-x} - \left[-xe^{-x} + \int e^{-x} dx \right] =$$

$$= -3e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} + c \quad c \in \mathbb{R},$$

$$= -2e^{-x} + xe^{-x} + c \quad c \in \mathbb{R},$$

$$= e^{-x}(x-2) + c \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dunque

$$\int_0^{+\infty} (3-x)e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[e^{-x}(x-2) \right]_0^M = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[e^{-M}(M-2) + 2 \right]$$

$$= \underline{\underline{2}}.$$

b5)i) $y' = \underbrace{-2x}_{a(x)} y + \underbrace{6x}_{b(x)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}$

è un'eq. differenziale lineare del primo ordine. Possiamo applicare la formula risolutiva per trovare l'integrale generale dell'eq. differenziale.

Oss. che $A(x) = \int a(x) dx = \int -2x dx = -x^2$ è una primitiva di $a(x)$.

Allora

$$y(x) = e^{A(x)} \left(c + \int b(x) e^{-A(x)} dx \right) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= e^{-x^2} \left(c + \int 6x e^{x^2} dx \right)$$

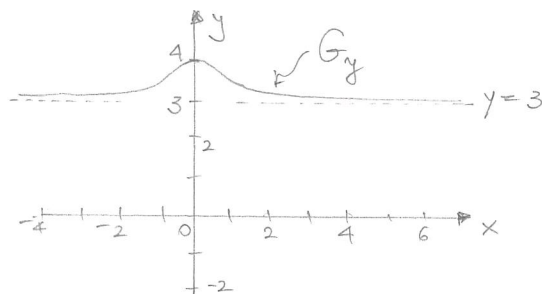
$$= e^{-x^2} (c + 3e^{x^2})$$

$$\underline{\underline{y(x) = ce^{-x^2} + 3}} \quad c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

ii) Oss. che $y(0) = 4 \Leftrightarrow 4 = c + 3 \Leftrightarrow c = 1$.

Quindi l'unica soluzione di i) soddisfacente $y(0) = 4$ risulta essere

$y(x) = e^{-x^2} + 3$, $x \in \mathbb{R}$



iii) Sì! La soluzione costante è data da $y(x) \equiv 3$ on $\mathbb{R}$.
(corrisponde a $c = 0$)

b6) Vedi Es. b6) FILA (A).