Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica, Ingegneria dell'Informazione e delle comunicazioni e
Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa
a.a. 2017-2018 - Foglio di esercizi 10 -... "continuità, derivabilità e limiti
con de l'Hôpital".

1) $$f(x)=\begin{cases}\alpha\sin x+\beta e^x & \text{se } x<0\\ \arcsin(\alpha x^2+x)-1 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

f è continua in $x_0=0$ $\iff$ $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

$$\iff \lim_{x\to0^-}\left[\alpha\sin x+\beta e^x\right]=\lim_{x\to0^+}\underbrace{\left[\arcsin(\alpha x^2+x)-1\right]=}_{\text{sappiamo già essendo f continua da sinistra in } x=0.}\underset{\overset{\shortparallel}{-1}}{f(0)}$$

$$\iff \underline{\underline{\beta=-1.}}$$

Quindi
$$f(x)=\begin{cases}\alpha\sin x-e^x & \text{se } x<0\\ \arcsin(\alpha x^2+x)-1 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

è continua in $x_0=0$. Oss. che $\lim_{x\to0^-} f'(x)=\lim_{x\to0^-}\left[\alpha\cos x-e^x\right]=\alpha-1$
$\lim_{x\to0^+} f'(x)=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2\alpha x+1}{\sqrt{1-(\alpha x^2+x)^2}}\right]=1$. Per il corollario del teorema di de l'Hôpital si ha $f'_-(0)=\alpha-1$, $f'_+(0)=1$ e f è derivabile in $x_0=0$
$\iff$ $\alpha-1=1$, ossia $\underline{\underline{\alpha=2.}}$ ⊛ ■

2) $$f(x)=\begin{cases}x^3+\alpha\sin x & \text{se } x<0\\ \log(1+3x) & \text{se } x\geq 0.\end{cases}$$

Oss. che $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}(x^3+\alpha\sin x)=0$, $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\log(1+3x)=0=f(0)$,

ossia f è continua in $x_0=0$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$.

- Possiamo det. $\alpha\in\mathbb{R}$ per cui f risulta derivabile studiando il limite del rapporto incrementale in $x_0=0$. Abbiamo, per $h>0$

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\log(1+3h)}{h}=\frac{\log(1+3h)}{3h}\cdot 3\xrightarrow[h\to0^+]{}3$$

e quindi $f'_+(0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=3$.

Per $h<0$, $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h^3+\alpha\sin h}{h}=h^2+\alpha\frac{\sin h}{h}\xrightarrow[h\to0^-]{}\alpha$
e quindi $f'_-(0)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\alpha$.
Dunque, f è derivabile in $x_0=0$ se e solo se $\underline{\underline{\alpha=3.}}$

⊛ si può verificare la derivabilità anche usando il limite del rapporto incrementale (i conti non sono troppo difficili!)

•• Possiamo anche procedere come segue: abbiamo f continua in $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + \alpha\cos x & \text{se } x<0 \\ \dfrac{3}{1+3x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

. Dal corollario del teorema di de l'Hôpital segue

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left[3x^2 + \alpha\cos x\right] = \alpha$$

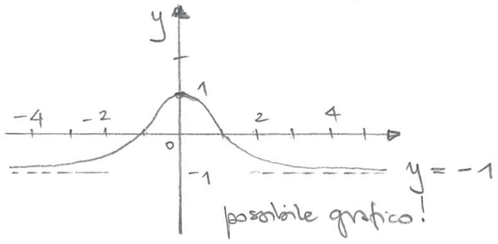
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{3}{1+3x}\right] = 3$$

, e abbiamo che f è derivabile in $x_0 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{\alpha = 3.}}$ ■

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua e derivabile soddisfacente entrambe le seg. proprietà:

i) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$

ii) $\max_{\mathbb{R}} f = 1$.



possibile grafico!

Es. • $f(x) = \boxed{\dfrac{-x^2+1}{x^2+1}}$ (*) $= \dfrac{2}{x^2+1} - 1$

(funzione pari; ha massimo per "x minimo", cioè per $x=0$; inoltre per $x\to\pm\infty$, $f(x)\sim -1$) □

• $f(x) = \boxed{\underbrace{2e^{-x^2}}\ \underbrace{-\ 1}}$ garantisce asintoto orizzontale per f, per $x\to -\infty$ $(+\infty)$ $y = -1$

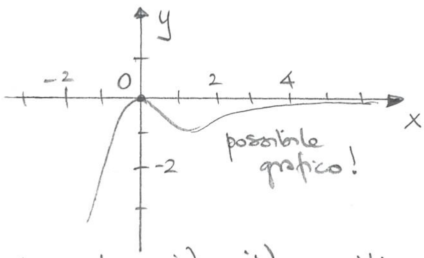
$2e^{-|x|}$ non va bene poiché non è derivabile in $x=0$!

(funzione pari derivabile; ha massimo in $x=0$ e vale 2; per $x\to \begin{smallmatrix}-\infty\\+\infty\end{smallmatrix}$ tende a 0) ■

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua e derivabile soddisfacente entrambe le seg. proprietà:

i) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

ii) f ha minimo locale in $\mathbb{R}$.



possibile grafico!

Es. $f(x) = -x^2 e^{-x} = \boxed{-\dfrac{x^2}{e^x}}$ (**)

(oss. $f(x)\le 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$, soddisfa facilmente i) e ii); inoltre $f(x)\sim -x^2$ per x vicino a 0; con $x=0$ pt. di max. loc.

Poiché f è continua, ha un massimo loc. in $x=0$ con $f(0)=0$ e inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, si ha sicuramente un pt. x_0 tale che $x = x_0$ pt. di min. loc. per f. ■

(*) Proposte fatte su PIAZZA che vanno bene!

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{su } [-1,1] \\ \dfrac{1}{x^2} - 1 & \text{altrimenti;} \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 2\dfrac{\sin x}{x} - 1 & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0; \end{cases} \qquad f(x) = \frac{4}{\pi}\arcsin\left(e^{-x^4}\right) - 1.$$

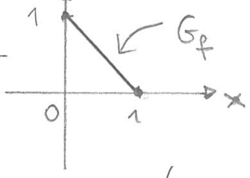
(**) Proposte fatte su PIAZZA che vanno bene!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se } x>0 \\ -x^2+1 & \text{se } x\le 0; \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{e^x} + \dfrac{\sin x}{x} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0; \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \dfrac{-\operatorname{arctg} x}{e^x} & \text{per } x\ge 0 \\ -(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} & \text{se } x<0. \end{cases}$$

5) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua. Quali delle seg. affermazioni è necessariamente vera?

i) Se f è derivabile in $[0,1]$ e se x_0 è un pt. di minimo per f, allora $f'(x_0)=0$.

(F) Es.



$f(x)=-x+1$; si ha $x=1$ pt. di minimo

$f'(x)=-1 \quad \forall x\in[0,1]$

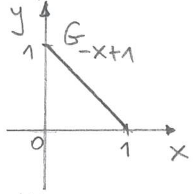
(ovviamente, in $x=0$, si ha solo $f'_+(0)=-1$ e in $x=1$, si ha solo $f'_-(1)=-1$)

(NOTA: questo fatto non è in contraddizione con il teorema di Fermat: Se f è derivabile in $x_0\in\,]0,1[$ (x_0 interno all'intervallo) e x_0 è un pt. di minimo loc. per f, allora $f'(x_0)=0$) ☐

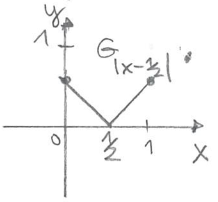
ii) (V) : lo garantisce il teorema di Weierstrass. ☐

iii) (F) : si può usare l'esempio di sopra, dove $x_0=1$ pt. di minimo per f in $[0,1]$, ma $f'(x_0)\neq 0$

(in questo caso f è deriv. in $x_0=1$, ma non è vero $f'(1)=0$).



Un esempio, in cui si ha x_0 pt. di minimo per f ma f non derivabile in x_0 (e quindi non può essere nemmeno verificato $f'(x_0)=0$), è il seguente: $f(x)=|x-\frac{1}{2}|$ in $x_0=\frac{1}{2}$. ☐



iv) (F) : basta prendere la funzione in i), ossia $f(x)=-x+1$ su $[0,1]$. f ha un minimo in $[0,1]$, ma $f'(x)=-1\neq 0\ \forall x\in[0,1]$.

■

6) i) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\log\cos x}^{f(x)}}{\underbrace{\operatorname{arctg} x^2}_{g(x)}}}$$

i) $\boxed{\frac{0}{0}}$

ii) $g'(x)=\dfrac{2x}{1+x^4}\neq 0$ in un intorno di 0 escluso lo zero

iii) $$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\frac{2x}{1+x^4}}=-\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{(1+x^4)}{2x}=\boxed{\frac{0}{0}}$$

ma usiamo il limite notevole per $\sin x$ per concludere

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}\xrightarrow[x\to 0]{}-\frac{1}{2}.$$

teor. de l'Hôpital $\Longrightarrow$ $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{\operatorname{arctg} x^2}=\boxed{-\frac{1}{2}}.$$ $\square$

ii) $$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{\overset{f(x)}{\log x}}{\underset{g(x)}{\log \sin x}}}$$

i) $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

ii) $g'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}\neq 0$ in un intorno destro di 0

iii) $$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{\overset{\to 1}{\sin x}}{x\cos x}\xrightarrow[x\to 0^+]{}1$$

teor. di de l'Hôpital $\Longrightarrow$ $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\log \sin x}=\boxed{1}.$$ $\square$

iii) $$\boxed{\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)}=\infty-\infty$$; quindi non possiamo applicare subito il teorema di de l'Hôpital. Scriviamo

$$\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x}=\frac{0}{0}$$

e quindi consideriamo

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\overset{f(x)}{x-1-\log x}}{\underset{g(x)}{(x-1)\log x}}$$

i) $\left[\frac{0}{0}\right]$

ii) $g'(x)=\log x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}=$
$=\log x+1-\frac{1}{x}\neq 0$ in un intorno destro di 1

iii) $$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1-\frac{1}{x}}{\log x+1-\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Per calcolare $\lim_{x\to 1^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ cerchiamo di usare nuovamente il teorema di de l'Hôpital (avendo controllato rapidamente la sua applicabilità)

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\log x+1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$ Quindi, ritornando al limite di partenza possiamo dire, in definitiva, che

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{trasform.}\\ \text{algebrica}}}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1-\log x}{(x-1)\log x}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{teorema di de l'Hôpital}}}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\log x+1-\frac{1}{x}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$\square$

iv) $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)-\frac{\pi}{4}}{x}}$$

f(x)

g

i) $\left[\frac{0}{0}\right]$

ii) $g'(x)=1 \neq 0$ in un intorno di 0

iii) $$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}\cdot\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{1}$$

$$= \frac{\cancel{(1+x^2)^2}}{(1+x^2)^2+1}\cdot\frac{-2x}{\cancel{(1+x^2)^2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

teor. di de l'Hôpital $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)-\frac{\pi}{4}}{x} = \boxed{0.}$$

☐

v) $$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sqrt{x}}}$$

f

g

i) $\left[\frac{0}{0}\right]$

ii) $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0$ in un intorno destro di 0

iii) $$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x}\right)^2}}\cdot\frac{-1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} =$$

$$= \frac{\cancel{1+x}}{\sqrt{(1+x)^2-1}}\cdot\frac{1}{(1+x)^{\cancel{2}}}\cdot 2\sqrt{x}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2x}}\cdot\frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{2\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{2+x}}\cdot\frac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \sqrt{2}$$

teor. di de l'Hôpital $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sqrt{x}} = \boxed{\sqrt{2}.}$$

☐

vi) $$\boxed{\lim_{x\to -\infty} x^3\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x-\frac{1}{x}\right)}$$

$\infty\cdot 0$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^3}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

f

g

i) $\left[\frac{0}{0}\right]$

ii) $g'(x)=\frac{-3}{x^4} \neq 0$ in ogni intorno destro di $-\infty$

iii) $$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x^2}}{-\frac{3}{x^4}} =$$

$$= \frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}\cdot\left(-\frac{x^4}{3}\right) \xrightarrow{x\to -\infty} -\infty$$

teor. di de l'Hôpital $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to -\infty} x^3\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg} x-\frac{1}{x}\right) = \boxed{-\infty.}$$

☐

vii) $$\boxed{\lim_{x\to1}\frac{\overset{f}{\cos\sqrt{x^2-1}-1}}{\underset{g}{\log\left(x+2(x^2-1)\right)}}}$$

i) $\left[\frac{0}{0}\right]$

ii) $g'(x)=\dfrac{1+4x}{x+2(x^2-1)}\neq0$ in un intorno di 1 tranne $x=1$

iii) $$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{-\overset{\nearrow 1}{\boxed{\left(\sin\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right.}}}{\frac{1+4x}{x+2(x^2-1)}}$$

$$\longrightarrow\frac{-1}{5}$$

teor. di de l'Hôpital $\Longrightarrow$

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\sqrt{x^2-1}-1}{\log(x+2(x^2-1))}=\boxed{-\frac{1}{5}}$$

$\square$

viii) $$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\overset{f}{(1+x)^{1/x}-e}}{\underset{g}{x}}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\log(1+x)}-e}{x}$$

i) $\left[\frac{0}{0}\right]$

ii) $g'(x)=1\neq0$ in un intorno di 0

iii) $$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{e^{\frac{\log(1+x)}{x}}\cdot\left[-\frac{1}{x^2}\log(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}\right]}{1}$$

Per calcolare $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ cerchiamo di usare nuovamente il teorema di de l'Hôpital (avendo controllato rapidamente la sua applicabilità)

$$\lim_{x\to0}\frac{-\left[\log(1+x)\right](x+1)+x}{x^2(1+x)}\underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cancel{\frac{-1}{1+x}(1+x)}-\log(1+x)\cancel{+1}}{2x+3x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

Quindi, ritornando al limite di partenza, possiamo dire, in definitiva, che

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=\boxed{-\frac{e}{2}}.$$

$\square$

ix) $$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\overset{f}{e^{\sin x}-e^x}}{\underset{g}{\operatorname{tg}x-x}}}.\quad\left[\frac{0}{0}\right]$$

Oss. rapidamente che $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{e^{\sin x}\cos x-e^x}{\frac{1}{\cos^2x}-1}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

e che $\dfrac{(f'(x))'}{(g'(x))'}=\dfrac{e^{\sin x}\cos^2x-e^{\sin x}\sin x-e^x}{\frac{2\sin x}{\cos^3x}}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

ma $$\frac{((f'(x))')'}{((g'(x))')'}=\frac{e^{\sin x}\cos^3x-e^{\sin x}2\cos x\sin x-e^{\sin x}\cos x\sin x-e^{\sin x}\cos x-e^x}{\frac{2\cos^4x+2\sin^2x\cdot3\cos^2x}{\cos^6x}}\xrightarrow[x\to0]{}-\frac{1}{2}$$

Applicando tre volte il teorema di de l'Hôpital segue che il limite di partenza vale $\boxed{-\frac{1}{2}}$ $\blacksquare$