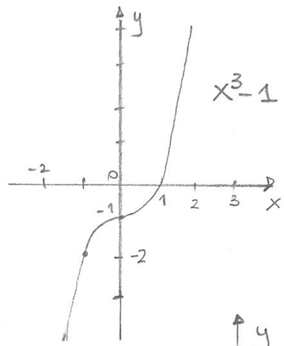
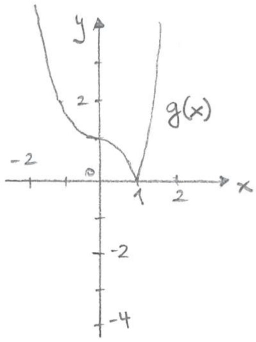
Università di Trento – Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa
a.a. 2017–2018 – Foglio di esercizi 11 ... "quando le funzioni non nascondono più alcun mistero"

11.1) $g(x) = |x^3 - 1|$





☐

$f(x) = \operatorname{arctg}|x^3 - 1|$

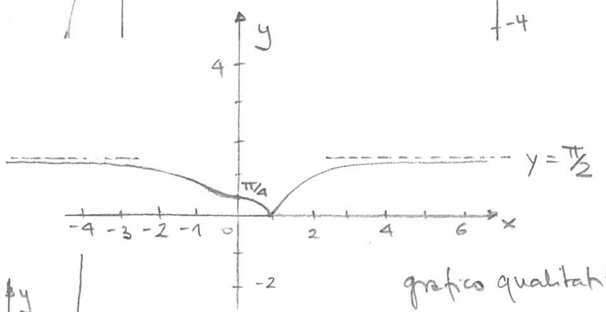


grafico qualitativo di f ☐

$f(x) = e^{|x^3-1|}$

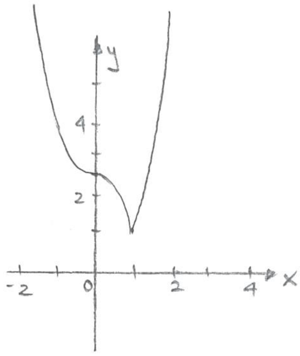
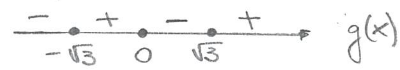


grafico qualitativo di f ■

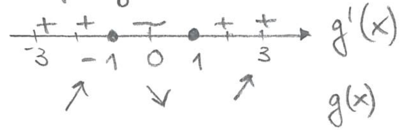
11.2) $f(x) = |x^3 - 3x|$ su $[-1, 2]$.

Oss. che $g(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$ • $\operatorname{dom} g = \mathbb{R}$



• g dispari ; continua, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

• $g'(x) = 3x^2 - 3$
$= 3(x^2 - 1)$ $x = \pm 1$ pt. critici per g

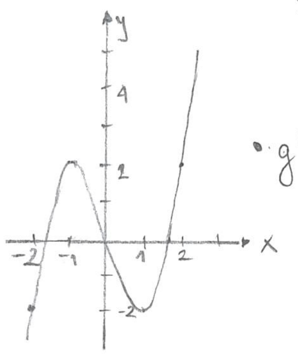


$x = -1$ pt. di max loc. (stretto) per g

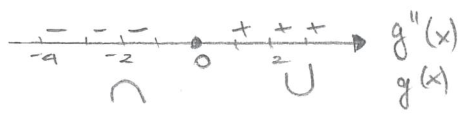
$g(-1) = -1 + 3 = 2$

$x = 1$ pt. di min. loc. (stretto) per g

$g(1) = 1 - 3 = -2$



• $g''(x) = 6x$



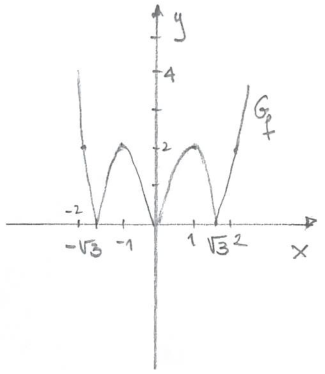


grafico qualitativo di $f(x)=|x^3-x|$

pt. di min. loc. (e ass.) di f su $[-1,2]$

$\underline{\underline{x=0}}$, $\underline{\underline{x=\sqrt{3}}}$

pt. di min. loc. (e assoluti) di f su $[-1,2]$

$\underline{\underline{x=-1}}$, $\underline{\underline{x=1}}$, $\underline{\underline{x=2}}$.

11.3) vedi a.a. 2016-17; [PIAZZA], Esercizio 3. (vedi anche allegato 1) qui di seguito)

11.4) vedi a.a. 2016-17; [Esercizi], Studio di funzioni (vedi anche allegato 2) qui di seguito)

11.5) se $\boxed{\alpha<0}$, allora $f(x) = x \underbrace{-\alpha}_{>0} \log x$: $\operatorname{dom} f =]0,+\infty[$,

• $\lim_{x\to 0^-} f = -\infty$ $\quad x=0$ asint. verticale (da destra) per f

$\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$

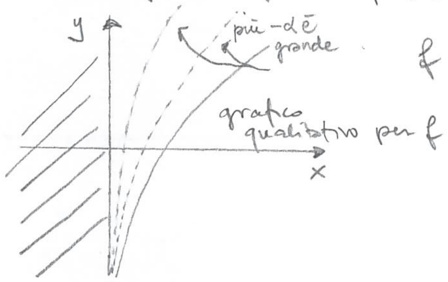
$\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f \qquad f'(x) = 1-\frac{\alpha}{x}$. Quindi $f'(x)=0 \iff 1-\frac{\alpha}{x}=0 \iff x=\alpha<0$ impossibile!

$\operatorname{dom} f'' = \operatorname{dom} f \qquad f''(x) = \frac{\alpha}{x^2} < 0$

0 + + + + + $f'(x)$

↗ f

f concava

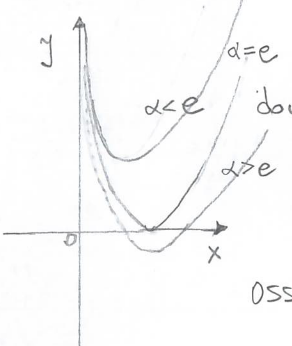


se $\boxed{\alpha=0}$ $\quad f(x)=x \quad \operatorname{dom} f=\mathbb{R}$.

se $\boxed{\alpha>0}$ $\quad f(x) = x-\alpha\log x \quad$ • $\operatorname{dom} f =]0,+\infty[$ $\quad$ • $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

$x=0$ asint. verticale (da destra) per f

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\quad$ ($x \gg \log x$ per $x\to+\infty$)



$\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f \qquad f'(x) = 1-\frac{\alpha}{x}$ e $f'(x)=0 \iff x=\alpha>0$ ✓

0 − − α + + + f'

↘ ↗ f

$x=\alpha$ pt. di min. loc (stretto) per f

$f(\alpha) = \alpha-\alpha\log\alpha$

Oss. che $f(\alpha)>0 \iff \alpha(1-\log\alpha)>0$

$\iff 1-\log\alpha>0$ (α per ipotesi >0)

$\iff \underline{\alpha<e}$

In conclusione, $f(x)$ non interseca mai l'asse x se $\underline{\underline{0<\alpha<e}}$.

[ALLEGATO 1]

3.7) i) $\boxed{f(x)=\begin{cases} x\sqrt{|x-4|-2} & \text{se } x<0 \\ \operatorname{arctg}(-x^2) & \text{se } x\geq 0\end{cases}}$. Ricordando che $|x-4|=\begin{cases} x-4 & \text{se } x\geq 4 \\ -(x-4) & \text{se } x<4\end{cases}$

possiamo scrivere

$$=\begin{cases} x\sqrt{2-x} & \text{se } x<0 \\ -\operatorname{arctg} x^2 & \text{se } x\geq 0\end{cases}$$

• 

• $\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{2-x} = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\left[-\operatorname{arctg} x^2\right] = -\frac{\pi}{2}$

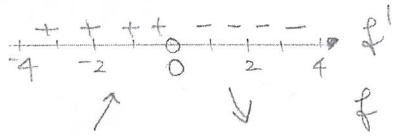
Notiamo che $\lim_{x\to 0^-} x\sqrt{2-x} = 0 = f(0) = \lim_{x\to 0^+}\left[-\operatorname{arctg} x^2\right]$ provando che f è continua in $x=0$. D'altra parte, f è continua in ogni $x\neq 0$ essendo composizione e prodotto di funzioni continue.

• $$f'(x)=\begin{cases} \sqrt{2-x}-\dfrac{x}{2\sqrt{2-x}} & \text{se } x<0 \\ -\dfrac{2x}{1+x^4} & \text{se } x>0\end{cases} = \begin{cases} \dfrac{4-3x}{2\sqrt{2-x}} & \text{se } x<0 \\ -\dfrac{2x}{1+x^4} & \text{se } x>0.\end{cases}$$

Poiché f è continua in $x=0$, dal corollario del teorema di de L'Hopital si ha $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, $f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{-2x}{1+x^4}=0$

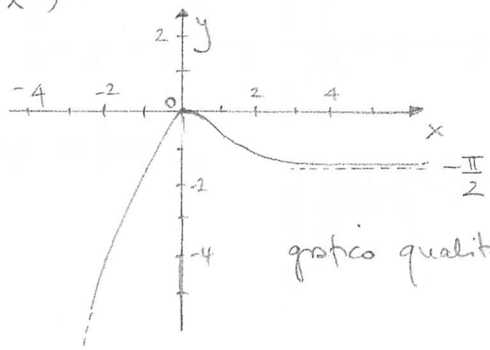
quindi f non è derivabile in $x=0$.

$x=0$ è un pt. angoloso per f.



• $$f''(x)=\begin{cases} \dfrac{3x-8}{4(2-x)^{3/2}} & \text{se } x<0 \\ \dfrac{2(3x^4-1)}{(1+x^4)^2} & \text{se } x>0\end{cases}$$

dom $f''=\mathbb{R}\setminus\{0\}$



$x=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ pt. di flesso per f

grafico qualitativo di f

□

ii) $\boxed{f(x) = \dfrac{e^{|x|}}{e^x - e}}$

- $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- segno di f $\quad$ $- - - - \; 0 \; + + + +$ $\quad f$ $\quad$ ($-2 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 5$)

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$x = 1$ asintoto verticale, $\quad y = 1$ asintoto orizz. per f, per $x \to +\infty$.

- $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{e^x - e} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{e^x}{e^x - e} & \text{se } x > 0, \; x \neq 1 \end{cases}$ $\quad$ (ricordando che $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$)

segue

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-e^{-x}(e^x - e) - e^{-x} e^x}{(e^x - e)^2} = \dfrac{e^{-x+1} - 2}{(e^x - e)^2} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{e^x(e^x - e) - e^x \cdot e^x}{(e^x - e)^2} = \dfrac{-e^{x+1}}{(e^x - e)^2} & \text{se } x > 0, \; x \neq 1 \end{cases}$$

$\text{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$f'_-(0) = \dfrac{e - 2}{(1 - e)^2} \qquad f'_+(0) = \dfrac{-e}{(1 - e)^2}$ $\qquad$ $+ + + \; 0 \; - - - \; 0 \; - - -$ $\quad f'(x)$ $\quad$ ($-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$)

$\nearrow \quad \searrow \quad \searrow \quad f$

$x = 0$ pt. angoloso per f

- $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}(4e^{2x} - 3e^{x+1} + e^2)}{(e^x - e)^3} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{e^{x+1}(e^x + e)}{(e^x - e)^3} & \text{se } x > 0, \; x \neq 1 \end{cases}$

$\text{dom} f'' = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ $\qquad$ $- - - - \; 0 \; - \; 0 \; +$ $\quad f''$

$\cup \; 0 \; \cup \; 1 \; \cup \quad f$

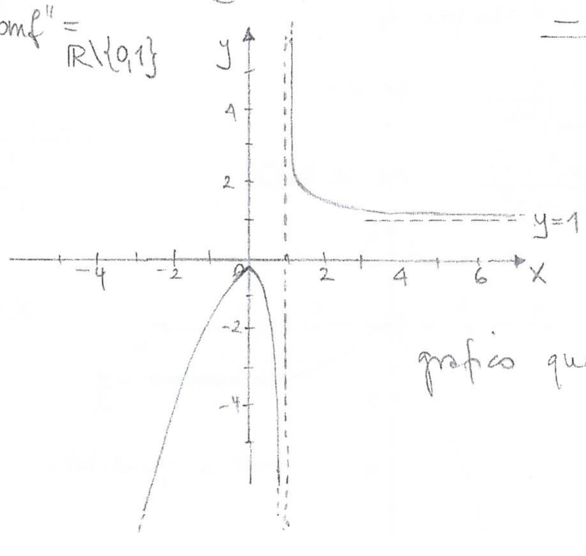


grafico qualitativo per f

$\square$

iii) $\boxed{f(x) = \sqrt{|x|}\,\log x^2}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad$ f è pari!
- Basta stud. $g(x) = f\big|_{]0,+\infty[}(x)$.
- segno di g $\quad$ $0 \;\; - \;\; \underset{1}{\bullet} \;\; + \;\; \underset{2}{|} \;\; + \;\to$

Ricordare : $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$\forall x \neq 0 \quad \log x^2 = 2\log|x|$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}\log x^2 = 0$ $\quad , \quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\log x^2 = +\infty$.

- $\operatorname{dom} g' =]0,+\infty[$ $\quad$ $g'(x) = \left(2\sqrt{x}\log x\right)' = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{x}} = \dfrac{\log x + 2}{\sqrt{x}}$

$g'(x) = 0 \iff \log x = -2 \iff x = \dfrac{1}{e^2}$ pt. critico per g

$/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\; \underset{0}{\circ} \; - \; \underset{1/e^2}{\bullet} \; + + + + + \to \quad g'(x)$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} g'(x) = -\infty$

$\qquad\qquad \searrow \qquad \nearrow \qquad\qquad g(x)$

$x = \dfrac{1}{e^2}$ pt. di minimo loc. stretto per g $\qquad$ $x=0$ è una cuspide per f

$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \dfrac{1}{e}\log\dfrac{1}{e^4} = -\dfrac{4}{e}$

- $\operatorname{dom} g'' =]0,+\infty[$ $\quad$ $g''(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(\sqrt{x}) - (\log x + 2)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

$= \dfrac{\cancel{2} - \log x - \cancel{2}}{2x^{3/2}} = \dfrac{-\log x}{2x^{3/2}}$

$/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\; \underset{0}{\circ} \; + + \; \underset{1}{\bullet} \; - - - - \to \quad g''(x)$

$\qquad\qquad \cup \qquad \cap \qquad\qquad g$

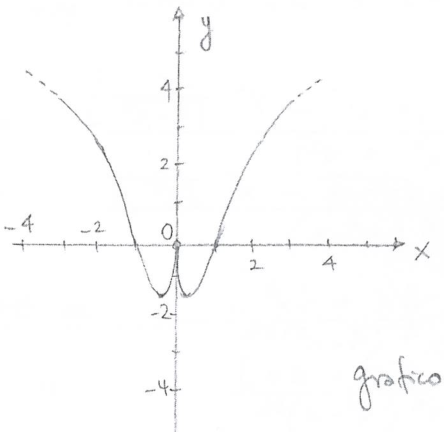


grafico qualitativo per f

$\square$

iv) $\boxed{f(x)=\dfrac{\sqrt{|x^2-4|}}{x}}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad f$ è dispari!
- Basta studiare $g(x) = f|_{]0,+\infty[}(x)$
- segno di g : $0 \; + \; + \; 2 \; + \; + \; 4 \; + \quad x$

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \quad x=0$ asintoto verticale

  $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1 \qquad y=1$ asintoto orizzontale per g, per $x\to+\infty$.

- $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x} & \text{se } 0<x<2\\[2mm] \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x} & \text{se } x\geq 2\end{cases}$

  g è continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ essendo composizione e rapporto di funzioni continue

- $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\cdot x-\sqrt{4-x^2}}{x^2} & \text{se } 0<x<2\\[2mm] \dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\cdot x-\sqrt{x^2-4}}{x^2} & \text{se } x>2\end{cases}$

  $=\begin{cases}\dfrac{-4}{x^2\sqrt{4-x^2}} & \text{se } 0<x<2\\[2mm] \dfrac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}} & \text{se } x>2\end{cases}$

Essendo g continua in $x=2$, risulta $g'_-(2)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-4}{x^2\sqrt{4-x^2}}=-\infty$

$g'_+(2)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}}=+\infty$.

Risulta che $x=2$ è una cuspide per g (e quindi per f).

- $g''(x)=\begin{cases}\dfrac{-4\left[-2x\sqrt{4-x^2}-x^2\cdot\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right]}{x^4(4-x^2)} & \text{se } 0<x<2\\[2mm] \dfrac{4\left[-2x\sqrt{x^2-4}-x^2\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right]}{x^4(x^2-4)} & \text{se } x>2\end{cases}$

  $=\begin{cases}\dfrac{-4\left[-8x+3x^3\right]}{x^4(4-x^2)^{3/2}} & \text{se } 0<x<2\\[2mm] \dfrac{4\left[-3x^3+8x\right]}{x^4(x^2-4)^{3/2}} & \text{se } x>2\end{cases}$

  $=\begin{cases}\dfrac{-4(-8+3x^2)}{x^3(4-x^2)^{3/2}} & \text{se } 0<x<2\\[2mm] \dfrac{-4(-8+3x^2)}{x^3(x^2-4)^{3/2}} & \text{se } x>2\end{cases}$

$0 \; + \; \sqrt{\tfrac{8}{3}} \; - \; 2 \; - \; - \; - \quad g''(x)$

$\cup \quad \cap \quad \cap \quad g(x)$

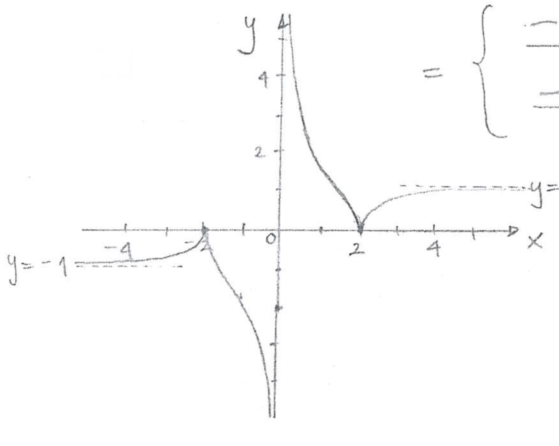


grafico qualitativo di f

v) $\boxed{f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + |x+1|}$

$$= \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} - x - 1 & \text{se } x < -1 \\ \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + x + 1 & \text{se } x \geq -1 \\ & x \neq 0 \end{cases}$$

• $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $y = -x-1$ asintoto obliquo per f, per $x \to -\infty$

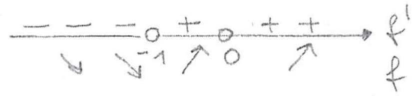
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2} + 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} + 1$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $y = x+1$ asintoto obliquo per f, per $x \to +\infty$.

• $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} - 1 & \text{se } x < -1 \\ \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} + 1 & \text{se } x > -1 \\ & x \neq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-x^2-2}{x^2+1} & \text{se } x < -1 \\ \dfrac{x^2}{x^2+1} & \text{se } x > -1 \\ & x \neq 0 \end{cases}$$

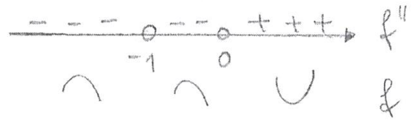


f è continua in $x=-1$; abbiamo $f'_-(-1) = \lim_{x \to -1^-} \frac{-x^2-2}{x^2+1} = -\frac{3}{2}$,

$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{2}$; quindi $x=-1$ è un pt. angoloso per f.

Notiamo inoltre che $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$.

• $$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} & \text{se } x < -1 \\ \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} & \text{se } x > -1 \\ & x \neq 0 \end{cases}$$



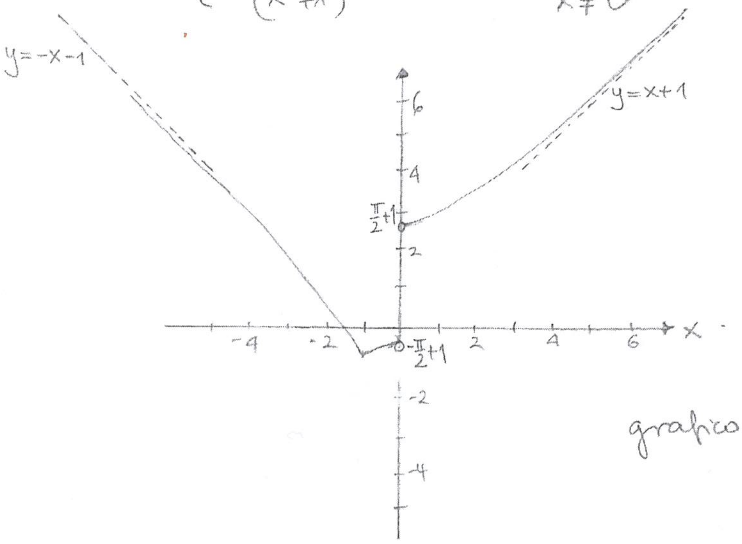


grafico qualitativo di f

[ALLEGATO 2]

Università di Trento – Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni
Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa.
a.a. 2016 – 2017 – Foglio di esercizi – Studio di funzioni –

1) i) $\boxed{f(x) = |x| - \sqrt{|x|}}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
- f è pari (il dominio è simmetrico rispetto all'origine e $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$).

<u>Quindi basta studiare f su $[0, +\infty[$!!</u> Si ha $f(0) = 0$.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Notiamo che f non ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Infatti $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x} = 1 = a$, ma
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to+\infty} [(x - \sqrt{x}) - x] = \lim_{x\to+\infty} (-\sqrt{x}) = -\infty .$$

- segno: $\quad \underset{0}{\circ} \; - \; - \; \underset{1}{\circ} \; + \; + \; + \quad$ $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$.

- f è continua essendo somma di funzioni continue.

- Per $x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Poiché f è continua in $x = 0$ e $\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\infty$, si ha $f'_+(0) = -\infty$. Per simmetria risulta che $(0,0)$ è una cuspide per f.

Inoltre, per $x > 0$, $f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = 0 \iff \sqrt{x} = \frac{1}{2}$, ossia $x = \frac{1}{4}$.
Risulta $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$. (pt. critico per f)

$\underset{0}{\circ} \; - \; \underset{\frac{1}{4}}{\circ} \; + \; \underset{1}{|} \; + \; \underset{2}{|} \; + \; + \quad f'(x)$

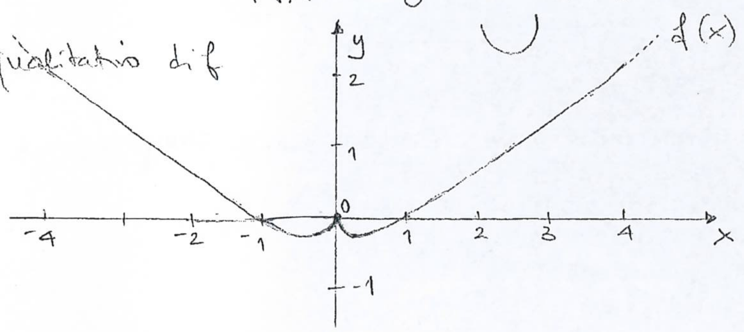
$\searrow \quad \nearrow \quad f(x)$

corrisponde alla cuspide

$x = \frac{1}{4}$ pt. di min. loc. stretto per f.

- Per $x > 0$, $f''(x) = \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$ $\quad \underset{0}{\circ} \; + \; \underset{1}{|} \; + \; \underset{2}{|} \; + \; \underset{3}{|} \; + \quad f''(x)$ $\quad \cup$

- grafico qualitativo di f



$\square$

ii) $\boxed{f(x)=\sqrt{x+\frac{8}{x}+\left|1-\frac{8}{x}\right|}}$

• dom f =

$=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 0\ ,\ x+\frac{8}{x}+\left|1-\frac{8}{x}\right|\geq 0\right\}$

Poniamo $g(x)=x+\frac{8}{x}+\left|1-\frac{8}{x}\right|=\begin{cases} x+\cancel{\frac{8}{x}}+1-\cancel{\frac{8}{x}} & \text{se } 1-\frac{8}{x}\geq 0 \\ x+\frac{8}{x}-1+\frac{8}{x} & \text{se } 1-\frac{8}{x}<0 \end{cases}$

Ne segue $g(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } \frac{8}{x}\leq 1 \\ x-1+\frac{16}{x} & \text{se } \frac{8}{x}>1 \end{cases}$

ovvia $g(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } x<0 \text{ o } x\geq 8 \\ x-1+\frac{16}{x} & \text{se } 0<x<8\ . \end{cases}$

Ora $g(x)\geq 0 \iff \begin{cases} x+1\geq 0 \iff x\geq -1 \\ x-1+\frac{16}{x}\geq 0 \iff \frac{\overbrace{x^2-x+16}^{>0 \text{ sempre}}}{x}\geq 0 \iff x>0 \end{cases}$

In definitiva, dom $f=[-1,0[\ \cup\ ]0,+\infty[$ e

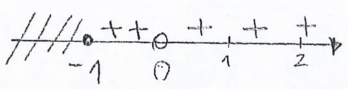
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{se } -1\leq x<0 \text{ o } x\geq 8 \\ \sqrt{x-1+\frac{16}{x}} & \text{se } 0<x<8\ . \end{cases}$$

• nessuna simmetria evidente!

• $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x+1}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x-1+\frac{16}{x}}=+\infty$ $x=0$ è asintoto verticale (da destra) per f.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x-1+\frac{16}{x}}=+\infty$ f non ha asintoto obliquo per $x\to+\infty$, poiché $f(x)\sim\sqrt{x-1}$ per $x\to+\infty$.

• segno  f

• f è continua in dom f (somma e composizione di funz. continue).

• dom f' = $]-1,0[\ \cup\ ]0,+\infty[\ \setminus\{8\}$

Abbiamo
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} & \text{se } -1<x<0 \quad \text{o } x>8\\[2ex] \dfrac{1-\frac{16}{x^2}}{2\sqrt{x-1+\frac{16}{x}}} & \text{se } 0<x<8.\end{cases}$$

Poichè f è continua (da destra) in $x=-1$, e $\lim\limits_{x\to-1^+} f'(x)=+\infty$, si ha $f'_+(-1)=+\infty$ ($x=-1$ pt. con tg verticale al grafico di f).

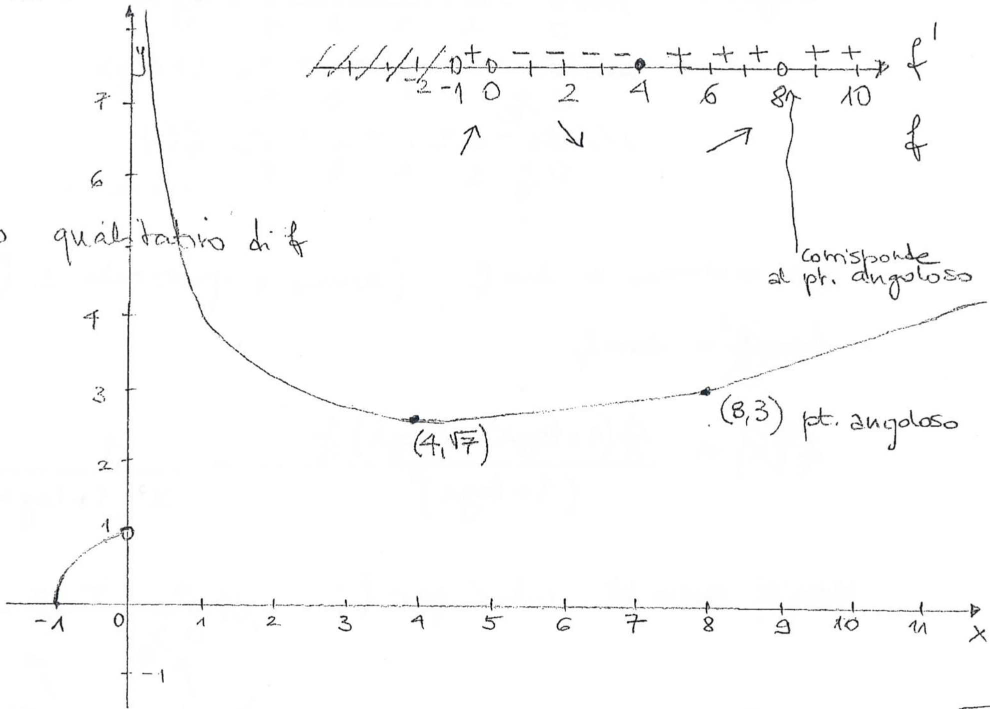
Inoltre $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\dfrac{1}{2}$.

Poichè f è continua in $x=8$ e $\lim\limits_{x\to 8^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 8^-}\dfrac{x^2-16}{2x^2\sqrt{x-1+\frac{16}{x}}}=\dfrac{1}{8}$, si ha $f'_-(8)=\dfrac{1}{8}$; d'altra parte

$\lim\limits_{x\to 8^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 8^+}\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{6}$, e $f'_+(8)=\dfrac{1}{6}$. Risulta che il pt. $(8,3)$ è un pt. angoloso per f.

Notiamo infine che $f'(x)=0 \iff x^2-16=0 \iff x=\pm 4$, di cui solo $x=4$ è accettabile.

• grafico qualitativo di f



□

iii) $\boxed{f(x) = \dfrac{\log x}{1+\log x}}$

• $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ \log x \neq -1\}$
$= \left]0, +\infty\right[\setminus \left\{\frac{1}{e}\right\}$
$= \left]0, \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

• Nessuna simmetria evidente. Si ha $f(1) = 0$.

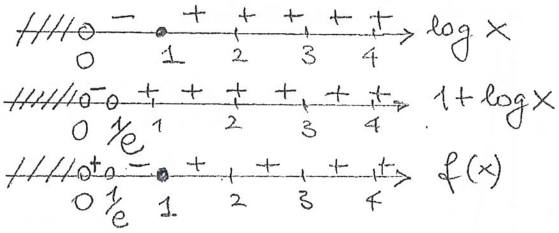
• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cancel{\log x}}{\cancel{\log x}\left(\underbrace{\frac{1}{\log x}}_{\to 0} + 1\right)} = 1$;

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^-} \dfrac{\overbrace{\log x}^{\to -1}}{\underbrace{1+\log x}_{\text{infinitesimo negativo}}} = +\infty$ $\quad x = \frac{1}{e}$ asintoto verticale (da sinistra) per f;

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{e}^+} \dfrac{\overbrace{\log x}^{\to -1}}{\underbrace{1+\log x}_{\text{infinitesimo positivo}}} = -\infty$ $\quad x = \frac{1}{e}$ asintoto verticale (da destra) per f;

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{\log x}}{\cancel{\log x}\left(\underbrace{\frac{1}{\log x}}_{\to 0} + 1\right)} = 1$ $\quad y = 1$ asintoto orizzontale per f, per $x \to +\infty$.

• segno:

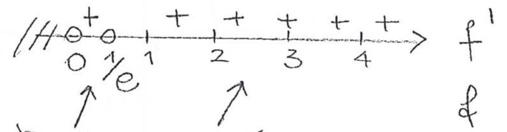


• f è continua in dom f (somma e quoziente di funzioni continue)

• $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+\log x) - (\log x)\frac{1}{x}}{(1+\log x)^2} = \frac{1}{x(1+\log x)^2} \overset{(*)}{>} 0 .$$

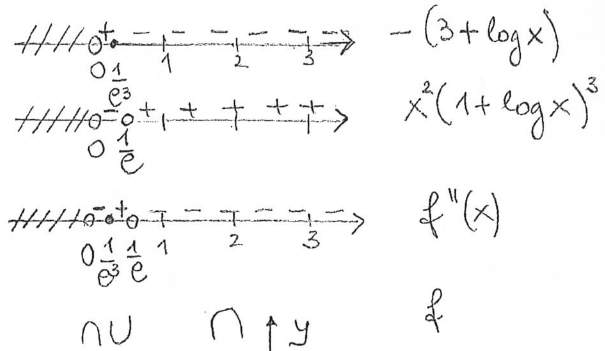
Non ci sono pt. critici per f;



• $\operatorname{dom} f'' = \operatorname{dom} f$ $\quad f''(x) = \dfrac{-(1+\log x)^{\cancel{2}} - \cancel{x}\cdot 2(\cancel{1+\log x})\cdot \frac{1}{\cancel{x}}}{x^2(1+\log x)^{\cancel{4}\,3}} =$

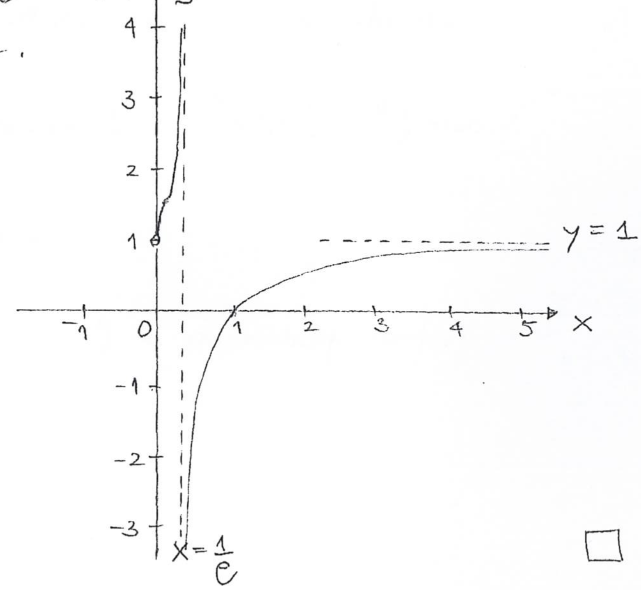
$$= \frac{-(3+\log x)}{x^2(1+\log x)^3}$$

(*) $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$.



$x = \frac{1}{e^3}$ pt. di flesso per f.

• grafico qualitativo di f



□

iv) $\boxed{f(x) = \frac{1+3x^4}{x^2}}$

• $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\, \cup \,]0, +\infty[$.

• f è pari (il dominio è simmetrico rispetto all'origine e $f(x) = f(-x) \ \forall x \in \mathrm{dom}\, f$).

Quindi basta studiare f su $]0, +\infty[$!!

• $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\quad x = 0$ asintoto verticale (da destra) di f

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad$ non ci sono asintoti obliqui!

Infatti $f(x) \sim 3x^2$ per $x \to +\infty$!

• segno: $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$.

• f è continua su $]0, +\infty[$, poiché somma e quoziente di funzioni continue.

• $\mathrm{dom}\, f' =]0, +\infty[$ $\quad f'(x) = \frac{12x^3 \cdot x^2 - (1+3x^4) 2x}{x^4} = \frac{6x^4 - 2}{x^3}$

$$= \frac{2(3x^4 - 1)}{x^3}$$

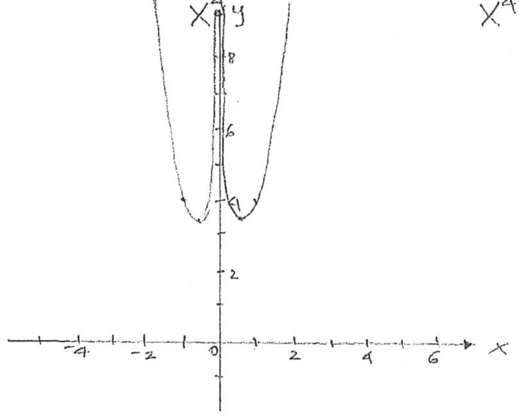
$$\begin{array}{l|ccccccc|l}
 & 0 & & \frac{1}{\sqrt[4]{3}} & & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
 & \circ & - & \bullet & + & + & + & + & 3x^4-1 \\
 & \circ & + & & + & + & + & + & x^3 \\
 & \circ & - & \bullet & + & + & + & + & f'(x) \\
 & & \searrow & & \nearrow & & & & f
\end{array}$$

$x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ pt. critico per $f(x)$ su $]0,+\infty[$; risulta che $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ è un pt. di min. loc. stretto per f ; si ha $f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = 2\sqrt{3} \sim 3.5$

- $\operatorname{dom} f'' =]0,+\infty[$ $\quad f''(x) = 2\left[\frac{12x^3 \cdot x^{\cancel{3}} - (3x^4-1)3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{6}4}}\right] =$

$$= \frac{6(4x^4 - 3x^4 + 1)}{x^4} = \frac{6(x^4+1)}{x^4} > 0$$
su $]0,+\infty[$.

- grafico qualitativo di f



$\square$

v) $\boxed{f(x) = \frac{x-4+|x+4|}{2} e^x}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$.
- nessuna simmetria evidente.

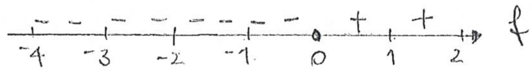
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ $\quad$ $y = 0$ asintoto orizzontale per f, per $x \to -\infty$.

  $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\quad$ non ci sono asintoti obliqui, poiché $f(x) \sim xe^x$ per $x \to +\infty$.

- $$f(x) = \begin{cases} \frac{x - \cancel{4} + x + \cancel{4}}{2} \cdot e^x & \text{se } x \geq -4 \\ \frac{\cancel{x} - 4 - \cancel{x} - 4}{2} e^x & \text{se } x < -4 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} xe^x & \text{se } x \geq -4 \\ -4e^x & \text{se } x < -4. \end{cases}$$

segno

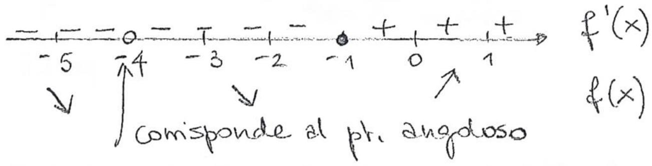


- continuità di f su tutto $\mathbb{R}$.
- $\mathrm{dom}\, f' = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + x e^x & \text{se } x > -4 \\ -4e^x & \text{se } x < -4 \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x=-4$ e $\lim\limits_{x \to -4^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to -4^+} (e^x + xe^x) = -3e^{-4}$, si ha $f'_+(-4) = -\frac{3}{e^4}$; analogamente da $\lim\limits_{x \to -4^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to -4} (-4e^x) = -4e^{-4}$ segue $f'_-(-4) = -\frac{4}{e^4}$. Risulta che il pt. $(-4, -\frac{4}{e^4})$ è un pt. angoloso per f.

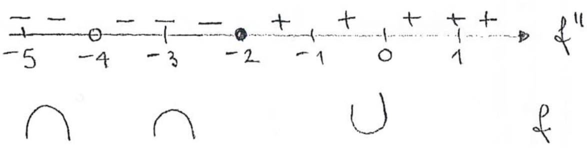
Infine $f'(x) = 0 \iff 1+x=0$, ossia $x=-1$.



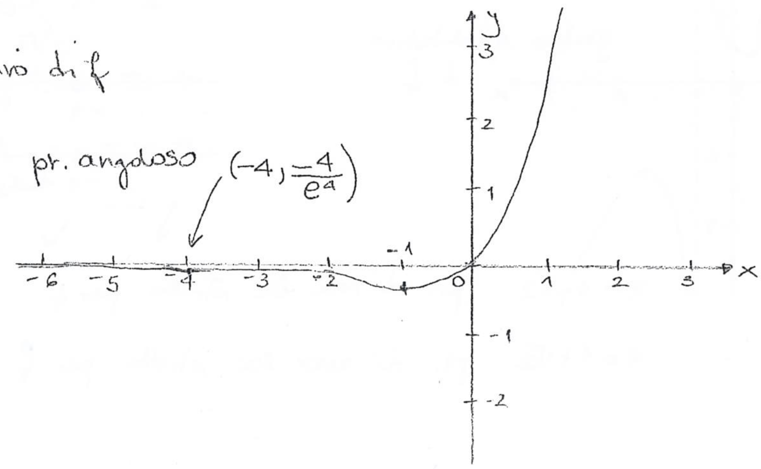
$x=-1$ è un pt. di minimo stretto per f, e $f(-1) = -\frac{1}{e}$.

- $\mathrm{dom}\, f'' = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

$$f''(x) = \begin{cases} (2+x)e^x & \text{se } x > -4 \\ -4e^x & \text{se } x < -4 \end{cases}$$



- grafico qualitativo di f



□

vi) $\boxed{f(x) = \dfrac{e^x}{1-x^2}}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.
- nessuna simmetria evidente; si ha $f(0) = 1$.
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $y = 0$ asintoto orizzontale per f, per $x \to -\infty$.

$\lim_{x \to -1^-} \dfrac{\overbrace{e^x}^{\to \frac{1}{e}}}{\underbrace{1-x^2}_{\text{infinitesimo negativo}}} = -\infty$ $x = -1$ asintoto verticale (da sinistra) per f

$\lim_{x \to -1^+} \dfrac{\overbrace{e^x}^{\to 1/e}}{\underbrace{1-x^2}_{\text{infinitesimo positivo}}} = +\infty$ $x = -1$ asintoto verticale (da destra) per f

$\lim_{x \to 1^-} \dfrac{\overbrace{e^x}^{\to e}}{\underbrace{1-x^2}_{\text{infinitesimo positivo}}} = +\infty$ $x = 1$ asintoto verticale (da sinistra) per f

$\lim_{x \to 1^+} \dfrac{e^x}{1-x^2} = -\infty$ $x = 1$ asintoto verticale (da destra) per f

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{1-x^2} = -\infty$ f non ha asintoto obliquo, per $x \to +\infty$

poiché $f(x) \sim -\dfrac{e^x}{x^2}$ per $x \to +\infty$.

- segno $\underset{-2}{-}\ - \ \underset{-1}{\circ}\ + \ \underset{0}{|}\ + \ \underset{1}{\circ}\ - \ \underset{2}{-}\ - \ \to$ $f(x)$ $(e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R})$

- f è continua in ogni pt. del suo dominio, essendo quoziente di funzioni continue.

- $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$ $f'(x) = \dfrac{e^x(1-x^2) + 2x e^x}{(1-x^2)^2} = \dfrac{e^x(-x^2+2x+1)}{(1-x^2)^2}$

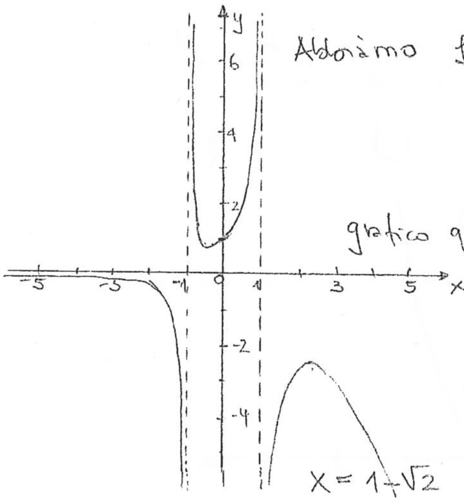


grafico qualitativo di f

Abbiamo $f'(x) = 0 \iff -x^2+2x+1 = 0 \iff x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$- - - - \underset{1-\sqrt{2}}{\bullet} + + + \underset{1+\sqrt{2}}{\bullet} - - - \to$ $-x^2+2x+1$

$+ + + \underset{-1}{\circ} + + \underset{1}{\circ} + + + \to$ $(1-x^2)^2$

$- - - \underset{-1}{\circ} - \underset{1-\sqrt{2}}{\bullet} + + \underset{1}{\circ} + + \underset{1+\sqrt{2}}{\bullet} - - - \to$ $f'(x)$

$\searrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \searrow$ f

$x = 1 - \sqrt{2}$ pt. di min. loc. stretto per f

$x = 1 + \sqrt{2}$ pt. di max. loc. stretto per f.

□

vii) $\boxed{f(x) = \log\left(\dfrac{x^2-2|x|+1}{x+1}\right)}$ • $\mathrm{dom} f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x \neq -1, \ \dfrac{x^2-2|x|+1}{x+1} > 0 \right\}$

Oss. che $x^2-2|x|+1 = \begin{cases} x^2-2x+1 = (x-1)^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2+2x+1 = (x+1)^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Segue quindi facilmente che $\mathrm{dom} f =]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

(poiché, $\forall x \geq 0$, $\dfrac{x^2-2x+1}{x+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x+1} > 0$ se $x \neq 1$, e

$\forall x < 0$, $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1} = \dfrac{(x+1)^2}{x+1} = x+1 > 0$ se $-1 < x$).

Possiamo inoltre scrivere $f(x) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{(x-1)^2}{x+1}\right) & \text{se } x > 0, x \neq 1 \\ \log(x+1) & \text{se } -1 < x \leq 0 \end{cases}$

- nessuna simmetria evidente
- $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \log(x+1) = -\infty$ $\quad x = -1$ asintoto verticale (da destra) per f

  $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \log\left(\dfrac{(x-1)^2}{x+1}\right) = -\infty$ $\quad x = 1$ asintoto verticale (da sinistra) per f

  $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \log\left(\dfrac{(x-1)^2}{x+1}\right) = -\infty$ $\quad x = 1$ asintoto verticale (da destra) per f.

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \log\left(\dfrac{(x-1)^2}{x+1}\right) = +\infty$ $\quad f$ non ha asintoto obliquo, per $x \to +\infty$, poiché $f(x) \sim \log x$, per $x \to +\infty$.

(*) vedi fondo pag. 10

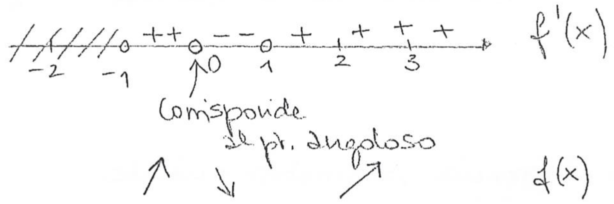
- segno di f
- f è continua nel suo dominio (somma, rapporto, composizione di funzioni continue)
- $\mathrm{dom} f' = \mathrm{dom} f \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cancel{x+1}}{(x-1)^{\cancel{2}}} \cdot \dfrac{2\cancel{(x-1)}(x+1) - (x-1)^{\cancel{2}}}{(x+1)^{\cancel{2}}} & \text{se } x > 0, \ x \neq 1 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

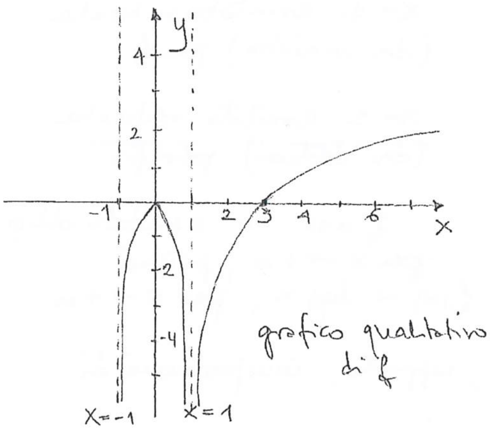
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2-1} & \text{se } x>0,\ x\neq 1 \\[2mm] \dfrac{1}{x+1} & \text{se } -1<x<0 . \end{cases}$$

Poichè f è continua in $x=0$ e $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x+1} = 1$ si ha $f'_-(0) = 1$; analog. da $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x+3}{x^2-1} = -3$ segue $f'_+(0) = -3$.
Risulta che il pt. $(0,0)$ è un pt. angoloso per f.

Infine $f'(x)=0 \iff x+3=0 \iff x=-3$, ma questo non è accettabile poichè $-3 \notin\ ]0,+\infty[\ \setminus\{1\}$.

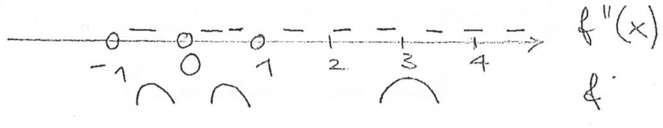


• dom f'' = dom f'

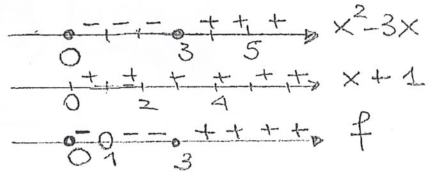


$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-1)-(x+3)2x}{(x^2-1)^2} & \text{se } x>0,\ x\neq 1 \\[2mm] -\dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{se } -1<x<0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-x^2-6x-1}{(x^2-1)^2} & \text{se } x>0,\ x\neq 1 \\[2mm] -\dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{se } -1<x<0 \end{cases}$$



(*) segno: $x \geq 0,\ x\neq 1$: $\dfrac{x^2-2x+1}{x+1} \geq 1 \iff \dfrac{x^2-3x}{x+1} \geq 0$



$-1<x<0$: $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1} = x+1 < 1$ se $x<0$ quindi