Università di Trento – Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica, Ingegneria dell'Informazione e delle comunicazioni e
Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa
a.a. 2017–2018 – Foglio di esercizi 12 ... "la magia degli sviluppi di Taylor e i primi passi con le serie"...

12.1) i) $f(x) = (e^{-x} - 1)\sin 2x$: ricordiamo che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)$ per $t \to 0$

da cui, ponendo $t = -x$, si ha $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$ per $x \to 0$.

D'altra parte, $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + o(t^5)$, per $t \to 0$, da cui

$\sin 2x = 2x - \frac{\cancel{8}^{\,4} x^3}{\cancel{6}_{\,3}} + \frac{2^5 x^5}{5!} + o(x^5)$ per $x \to 0$. Ne segue che

$$f(x) = (e^{-x} - 1)\sin 2x = \left[-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right]\left[2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\right]$$
$$= -2x^2 + \frac{4}{3}x^4 + x^3 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0$$
$$= -2x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \to 0.$$

Il polinomio ricercato è quindi $\boxed{P_4(x) = -2x^2 + x^3 + x^4}$. $\square$

ii) $f(x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$: ricordiamo che $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$,

da cui, ponendo $t = -\frac{x^2}{2}$, si ha $\log\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$ per $x \to 0$.

Il polinomio ricercato è quindi $\boxed{P_4(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}}$. $\square$

iii) $f(x) = (e^{2x} - 1)^3$ (*) : ricordiamo che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$ per $t \to 0$

da cui, ponendo $t = 2x$, si ha $e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$ per $x \to 0$

Ne segue che

$$f(x) = (e^{2x} - 1)^3 = \left(2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^3$$
$$= 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot 2x^2 + o(x^4) = 8x^3 + 24x^4 + o(x^4)$$

Il polinomio ricercato è quindi $\boxed{P_4(x) = 8x^3 + 24x^4}$. $\blacksquare$

12.2) i) $f(x) = (x - x^2)(\cos 2x - 1) + 2x\log(1 + x^2)$

$$= (x - x^2)\left(-\frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4)\right) + 2x\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)$$
$$= (x - x^2)\left(-2x^2 + \frac{16x^4}{24} + o(x^4)\right) + 2x^3 + x^5 + o(x^5)$$
$$= \cancel{-2x^3} + 2x^4 + o(x^4) + \cancel{2x^3} + o(x^4) \qquad \boxed{\begin{array}{l}\text{pp. } +2x^4 \\ \text{ordine } \ n=4\end{array}}.$$

Alternativa:

(*) si può usare $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ e quindi $f(x) = e^{6x} - 3e^{4x} + 3e^{2x} - 1 \overset{\text{ora si usano gli sviluppi!}}{=} \cancel{1} + 6x + \frac{(6x)^2}{2} + \frac{(6x)^3}{6} + \frac{(6x)^4}{24}$
$- 3\left(\cancel{1} + 4x + \frac{(4x)^2}{2} + \frac{(4x)^3}{6} + \frac{(4x)^4}{24}\right) + 3\left(\cancel{1} + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + \frac{(2x)^4}{24}\right) - \cancel{1} + o(x^4) = 8x^3 + 24x^4 + o(x^4)$

ii) $f(x) = \log(\cos x) + \frac{1}{2}\sin^2 x$

$$= \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)$$

$$= \cancel{-\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + o(x^4) + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$\boxed{\text{pp. } -\frac{x^4}{4} \quad \text{ordine d'infinitesimo } n=4}$.

12.3) i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos\frac{1}{x} - e^{\frac{1}{x^2}}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}} = -\frac{3}{2}$; infatti

$$\frac{\cos\frac{1}{x} - e^{1/x^2}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}} = \frac{\cancel{1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{24}\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) - \cancel{1} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{-\frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{-3/2}.$$

ii) $\lim_{x\to0^+} \frac{e^{3x} - (1+x)^3}{x(\sqrt{1+x} - 1)} = 3$; infatti

$$\frac{e^{3x} - (1+x)^3}{x(\sqrt{1+x} - 1)} = \frac{\cancel{1} + \cancel{3x} + \frac{9x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1} - \cancel{3x} - 3x^2 + o(x^2)}{x\left(\cancel{1} + \frac{1}{2}x + o(x) - \cancel{1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \xrightarrow[x\to0^+]{} \boxed{3}.$$

iii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}}{\log\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{2}$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}}{\log\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{\cancel{\frac{1}{x}} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \cancel{\frac{1}{x}} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{\frac{1}{2}}.$$

iv) $\lim_{x\to1} \frac{\sin^2(x-1)}{\sqrt{x}\,\log^2 x} = \lim_{y\to0} \frac{\sin^2 y}{\sqrt{1+y}\,\log^2(1+y)}$

$$\frac{\sin^2 y}{\sqrt{1+y}\,\log^2(1+y)} = \frac{y^2 + o(y^2)}{\sqrt{1+y}\,(y^2 + o(y^2))} \xrightarrow[y\to0]{} \boxed{1}.$$

12.4) i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{-x}-1)\sin 2x + \log\left(1-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{5}{2}x^2}{\cos x^\alpha - 1}$

$$\frac{(e^{-x}-1)\sin 2x + \log\left(1-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{5}{2}x^2}{\cos x^\alpha - 1} \underset{\text{Es. 12.1 i) ii)}}{=} \frac{\cancel{-2x^2}+x^3+x^4+o(x^4)\cancel{-\frac{x^2}{2}}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\cancel{+\frac{5}{2}x^2}}{-\frac{x^{2\alpha}}{2}+o(x^{2\alpha})}$$

$$= \frac{x^3+o(x^3)}{-\frac{x^{2\alpha}}{2}+o(x^{2\alpha})} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} 0 & \text{se } 2\alpha<3 \\ -2 & \text{se } 2\alpha=3 \\ -\infty & \text{se } 2\alpha>3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<3/2 \\ -2 & \text{se } \alpha=3/2 \\ -\infty & \text{se } \alpha>3/2 . \end{cases}$$

□

ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{3x e^x - \sin(\log(1+x)) - 2x - \frac{7}{2}x^\alpha}{\sin x^3}$

$$\frac{3x e^x - \sin(\log(1+x)) - 2x - \frac{7}{2}x^\alpha}{\sin x^3} = \frac{3x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) - \sin\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right) - 2x - \frac{7}{2}x^\alpha}{x^3+o(x^3)}$$

$$= \frac{3x+3x^2+\frac{3}{2}x^3+o(x^3)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)-2x-\frac{7}{2}x^\alpha}{x^3+o(x^3)}$$

$$= \frac{\cancel{2x}+\frac{7}{2}x^2+\frac{3}{2}x^3-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\cancel{-2x}-\frac{7}{2}x^\alpha}{x^3+o(x^3)}$$

$$= \frac{\frac{7}{2}x^2+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)-\frac{7}{2}x^\alpha}{x^3+o(x^3)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha<2 \\ \frac{4}{3} & \text{se } \alpha=2 \\ +\infty & \text{se } \alpha>2 . \end{cases}$$

■

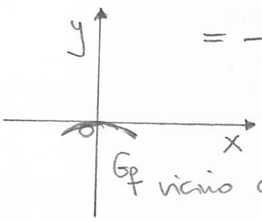
12.5 $f(x)=e^{-x^2}$ $\qquad f'(x)=-2xe^{-x^2}$ $\qquad f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}$

$$P_2(x) = e^{-1}-2e^{-1}(x-1)+\frac{1}{2}(-2+4)e^{-1}(x-1)^2$$
$$= e^{-1}\left[1-2(x-1)+(x-1)^2\right].$$

■

12.6 a) $f(x)=\sqrt{1+x}-\sin\frac{x}{2}-1 = \cancel{1}+\cancel{\frac{x}{2}}-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)-\cancel{\frac{x}{2}}+\frac{x^3}{3!8}+o(x^3)\cancel{-1}$

$$= -\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$$



G_f vicino a 0.

□

b) $f(x) = -x^2 + 3x^3 - o(x^3)$ per $x \to 0$.

$\boxed{f(0)=0}$ $\boxed{f'(0)=0}$ $\frac{f''(0)}{2} = -1 \Rightarrow \boxed{f''(0)=-2}$

$\frac{f'''(0)}{3!} = 3 \Rightarrow \boxed{f'''(0) = 18}$.

12.7) a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2|\alpha|-4}{|\alpha|+2}\right)^n$: è una serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ con $q = \frac{2|\alpha|-4}{|\alpha|+2}$,

che risulta convergente se e solo se $-1 < \frac{2|\alpha|-4}{|\alpha|+2} < 1 \Leftrightarrow$

$-|\alpha| - 2 < 2|\alpha| - 4 < |\alpha| + 2$

$\Rightarrow \begin{cases} 2 < 3|\alpha| \\ |\alpha| < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\alpha| > \frac{2}{3} \\ |\alpha| < 6 \end{cases} \Rightarrow \alpha \in \left]-6, -\frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{2}{3}, 6\right[$.

α

$\underline{S} = \frac{1}{1 - \frac{2|\alpha|-4}{|\alpha|+2}} = \underline{\frac{|\alpha|+2}{6-|\alpha|}}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$, $a_n > 0$: si può osservare subito che la serie è convergente, poiché $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ per $n \to +\infty$ e la serie $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$.

Si può però anche osservare che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+5n+6} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{b_n} - \underbrace{\frac{1}{n+3}}_{b_{n+1}}\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - b_{n+1}) = \text{serie telescopica} = b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}.$$

12.8) a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+n^2}{3^n+n}$, $a_n > 0$: serie a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Si ha $\frac{2^n+n^2}{3^n+n} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n$ per $n \to +\infty$,

ed essendo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ convergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è convergente.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{n^6+\log n+3^n}{2^n+n^4+\log^5 n}}_{a_n}$: serie a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

oppure $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \neq 0$!

Si ha $a_n \sim \left(\frac{3}{2}\right)^n$ per $n\to+\infty$, ed essendo la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è convergente. $\square$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sqrt[3]{n}\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}}_{a_n}$: serie a termini positivi. Si osservi che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$! Quindi non è soddisfatta la cond. nec. affinché una serie converga. Essendo una serie a termini positivi, possiamo concludere che la serie diverge positivamente. $\blacksquare$

12.9) a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \overbrace{\underbrace{\log(1+\operatorname{arctg} n^\alpha)}_{>0}}^{a_n}$ $\forall \alpha\in\mathbb{R}$: serie a termini positivi; quindi o converge o diverge positiv.

se $\alpha \geq 0$, $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, quindi non è soddisfatta la cond. nec. per la converg. della serie. Quindi diverge positiv.

se $\alpha < 0$ $\log(1+\operatorname{arctg} n^\alpha) = \log\left(1+\operatorname{arctg}\frac{1}{n^{-\alpha}}\right) \sim \operatorname{arctg}\frac{1}{n^{-\alpha}} \sim$

$\sim \frac{1}{n^{-\alpha}}$ per $n\to+\infty$.

Essendo la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-\alpha}} < +\infty \iff -\alpha > 1$, ossia $\alpha < -1$, possiamo concludere per il criterio del confronto asintotico che $\sum a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } -1\leq\alpha<0 \\ <+\infty & \text{se } \alpha<-1. \end{cases}$

In definitiva, la serie data è convergente se e solo se $\boxed{\alpha<-1}$ $\square$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}+\sin\frac{1}{n}\right)n^\alpha$: la serie $\sum \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}\, n^\alpha < +\infty \iff$

$\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}} < +\infty \iff \frac{1}{2}-\alpha > 1$ ossia $\boxed{\alpha<-\frac{1}{2}}$

(ricordare $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ per $n\to+\infty$ + criterio del confronto asintotico) (ricordare $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$ + criterio confronto asintotico) la serie $\sum \left(\sin\frac{1}{n}\right) n^{\alpha} < +\infty \iff \sum \frac{1}{n} n^{\alpha} < +\infty$

$\iff 1-\alpha > 1$, ossia $\alpha < 0$.

In definitiva, la serie data risulta convergente $\iff \boxed{\alpha < -\frac{1}{2}}$.

12.10) i) $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{a}{4}\right)^n}_{a_n}$ $\quad a>0$: Posto $a_n = \frac{1}{n^2}\left(\frac{a}{4}\right)^n > 0$, allora

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2}\left(\frac{a}{4}\right) \longrightarrow \frac{a}{4}.$$

Per il criterio della radice n-esima la serie data converge per $a<4$ $\left(\text{cioè } \frac{a}{4} < 1\right)$.

Per $a=4$ risulta la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, che è convergente.

Quindi la serie data è convergente $\forall \boxed{0 < a \le 4}$. □

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{a}{4}\right)^n$ $\quad a>0$: procedendo come in a) si giunge alla convergenza della serie data $\forall \boxed{0 < a < 4}$.

(ricordare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente positiv.). □

iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n^2}}{(n!)^n}$: Poniamo $a_n = \frac{e^{n^2}}{(n!)^n} > 0$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n!} = 0$,

per il criterio della radice n-esima possiamo concludere che la serie data è <u>convergente</u>. □

iv) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{100}}{3^n}$: Poniamo $a_n = \frac{n^{100}}{3^n} > 0$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{(\sqrt[n]{n})^{100}}{3} \to \frac{1}{3} < 1$,

per il criterio della radice n-esima possiamo concludere che la serie data è <u>convergente</u>. □

v) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$: Poniamo $a_n = \frac{1}{4^n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2} > 0$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

$= \frac{e^2}{4} > 1$, per il criterio della radice n-esima possiamo concludere che la serie data è <u>divergente</u> □.

vi) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2+|\cos n|}$: Poniamo $a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2+|\cos n|} > 0$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, non possiamo concludere nulla usando il criterio della radice n-esima. Ma oss. che $\underbrace{\frac{2}{n^2+1}}_{} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2+|\cos n|} < \frac{3}{n^2}$, dal criterio del confronto si ottiene che la serie data è convergente.

basta $0 < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2+|\cos n|} < \frac{3}{n^2}$