Università di Trento – Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa
a.a. 2017-2018 – Foglio di esercizi 13... "Serie à gogo... e primi contatti con la funz. integrale"

RICORDARE: $\sum a_n$ con $a_n \geq 0$, o converge o diverge positivamente!

13.1) Sia $\boxed{a_n = \dfrac{2^{n\alpha}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

Abbiamo $a_n = \dfrac{(2^\alpha)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} > 0$. Oss. che $a_n \sim \dfrac{(2^\alpha)^n}{n}$ per $n \to +\infty$

Risulta subito che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \leq 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$.

Oss. che per $\boxed{\alpha < 0}$, $0 < a_n < \left(\dfrac{1}{2^{-\alpha}}\right)^n$. Poichè $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{-\alpha}}\right)^n < +\infty$ (serie geom!) per il criterio del confronto, anche la serie data è <u>convergente</u>.

se $\boxed{\alpha = 0}$, $a_n \sim \dfrac{1}{n}$ e la serie data <u>diverge positiv.</u> per confronto con $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

se $\boxed{\alpha > 0}$, la serie <u>diverge</u> poichè non è soddisfatto il criterio nec. per la convergenza di una serie (si può anche oss. che, per $\alpha > 0$, $a_n > \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$. Poichè $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} = +\infty$, anche la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$) ∎

13.2) i) $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\log n^4}{n^2+n}}$: serie a termini positivi; $a_n = \dfrac{\log n^4}{n^2+n} = \dfrac{4\log n}{n^2+n} > 0$.

Poichè $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$, abbiamo che $0 < \dfrac{\log n}{\sqrt{n}} < 1$ $\forall n \geq \bar{N}$ quindi $0 < a_n < \dfrac{4}{n^{3/2}}$ $\forall n \geq \bar{N}$; essendo $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}} < +\infty$, per il criterio del confronto anche la serie data è <u>convergente</u>. □

Possiamo anche procedere così: essendo $\log n = o(\sqrt{n})$ per $n \to +\infty$ (cioè $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log n}{\sqrt{n}} = 0$) si ha che $\dfrac{4\log n}{n^2+n} = o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ per $n \to +\infty$ ed essendo la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ convergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è <u>convergente</u>.(*) □

ii) $\boxed{\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\log n}}$: serie a termini positivi; $a_n = \dfrac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\log n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}\log n}$ per $n \to +\infty$

Essendo la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}\log n}$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è <u>divergente</u>. □

(*) Ancora più rapido: osservare che $\dfrac{\log n^4}{n^2+n} \sim \dfrac{4\log n}{n^2} = \dfrac{4}{n^2(\log n)^{-1}}$. Poichè $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{4}{n^2(\log n)^{-1}}$ è convergente, per il criterio del confronto asintotico, anche la serie data è convergente.

iii) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(\frac{n+3}{n+1}\right)}{n}}$: $0 < a_n = \frac{\log\left(\frac{n+3}{n+1}\right)}{n} = \frac{\log\left(1+\frac{2}{n+1}\right)}{n} = \frac{\frac{2}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)}{n}$ per $n \to +\infty$

$\sim \frac{2}{n^2+n} \sim \frac{2}{n^2}$ per $n \to +\infty$.

Essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è convergente. □

iv) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \log\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)}$: $a_n = n^2 \log\left(\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$ per $n \to +\infty$ poiché $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$. Ora basta osservare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, poiché $\overset{\to -\infty}{n^2\log\left(\frac{3}{4n^3}\right)} \geq n^2 \log\left(\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \geq \overset{\to -\infty}{n^2\log\left(\frac{1}{4n^3}\right)}$

$\left[\begin{array}{l} \frac{o\left(\frac{1}{n^3}\right)}{1/n^3} \to 0 \quad \forall n \to +\infty \\ \text{quindi } -\frac{1}{4n^3} < o\left(\frac{1}{n^3}\right) < \frac{1}{4n^3} \quad \forall n \geq N \\ \frac{1}{4n^3} < \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) < \frac{3}{4n^3} \quad \forall n \geq N \end{array}\right]$

Quindi la serie non soddisfa la cond. nec. per la converg. di una serie. Essendo a termini neg., risulta che la serie data diverge neg. □

13.3) i) $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+2^n}{n!}}$: $a_n = \frac{1+2^n}{n!} > 0$. Abbiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{1+2^n} =$

$= \frac{\cancel{2^n}\left(1/2^n+2\right)}{(n+1)\,\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}\left(1/2^n+1\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Quindi per il criterio del rapporto la serie data è convergente. □

ii) $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n|\alpha|-n}}{n\log^2 n}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$: La serie $\sum_{n=2} \frac{\left(2^{|\alpha|-1}\right)^n}{n \log^2 n}$ è a termini positivi.

Posto $a_n = \frac{\left(2^{|\alpha|-1}\right)^n}{n\log^2 n}$ si ha che $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(2^{|\alpha|-1}\right)^{n+1}}{(n+1)\log^2(n+1)} \cdot \frac{n\log^2 n}{\left(2^{|\alpha|-1}\right)^n}$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 2^{|\alpha|-1}$. Per il criterio del rapporto possiamo dire che la serie data è convergente se $2^{|\alpha|-1} < 1$, diverge positiv. se $2^{|\alpha|-1} > 1$. Se $2^{|\alpha|-1} = 1$, la serie risulta $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^2 n}$ che è convergente.

Quindi in definitiva, abbiamo che la

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n = \begin{cases} < +\infty & \text{se } |\alpha| \leq 1 \\ +\infty & \text{se } |\alpha| > 1 \end{cases} = \boxed{\begin{cases} < +\infty & \text{se } \alpha \in [-1,1] \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}}$$ ■

13.4) i) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin n}{n\left(1+\log^{5/4} n\right)}}_{a_n}}$: La serie data non è a termini di segno costante! Osserviamo però facilmente che $\left|\frac{\sin n}{n\left(1+\log^{5/4} n\right)}\right| \leq \frac{1}{n\log^{5/4} n}$

Poiché $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^{5/4} n} < +\infty$, per il criterio del confronto abbiamo che la serie data è assolutamente convergente, e quindi convergente. □

ii) $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha^2+1/2}(\log n)^{\alpha+3/4}}}$: la serie è a termini positivi. Sappiamo che essa converge se $\begin{cases} \alpha^2+\frac{1}{2} > 1 \\ \alpha+\frac{3}{4} \text{ qualsiasi} \end{cases}$ oppure $\begin{cases} \alpha^2+\frac{1}{2} = 1 \\ \alpha+\frac{3}{4} > 1 \end{cases}$

$\iff \{\alpha^2 > \frac{1}{2}$ oppure $\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2} \\ \alpha > \frac{1}{4} \end{cases}$

$\iff \alpha \in \left]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[.$ ■

13.5) i) $\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n\sqrt{\log n}}}$: Oss. che $\sum_{n=2}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n-1}{n\sqrt{\log n}}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n\sqrt{\log n}}$.

Poiché $a_n = \frac{n-1}{n\sqrt{\log n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\log n}}$ per $n \to +\infty$, la serie data non è assolut. convergente, poiché la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} = +\infty$ (basta oss. che $\frac{1}{\sqrt{\log n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ per $n \geq 2$).

Notiamo però che possiamo applicare il criterio di Leibniz per provare che la serie data converge (semplicemente).

Infatti, $a_n > 0 \ \forall n \geq 2$, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ e $a_n \searrow 0 \ \forall n \geq 4$

$\left(f(x) = \frac{x-1}{x\sqrt{\log x}} \right.$, $f'(x) = \frac{x\sqrt{\log x} - (x-1)\left(\sqrt{\log x} + \frac{1}{2\sqrt{\log x}}\right)}{x^2 \log x}$

$= \frac{2x\log x - (x-1)(2\log x + 1)}{(x^2\log x)2\sqrt{\log x}} = \frac{2\log x - x + 1}{(x^2\log x)2\sqrt{\log x}} < 0 \quad x \geq 4$ sicuramente$\Big)$ □

ii) $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{n\sqrt{\log n}}}$: Oss. che $\sum_{n=2}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{n\sqrt{\log n}}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{n\sqrt{\log n}}$.

Poiché $a_n = \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{n\sqrt{\log n}} \sim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{n\sqrt{\log n}} = \frac{1}{n^{3/2}\sqrt{\log n}}$ per $n \to +\infty$,

la serie data è assolut. convergente, poiché la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}\sqrt{\log n}}$ è convergente. Essendo assolut. convergente è anche convergente (semplicemente). ■

13.6) a) $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{\alpha^2-1})^n}{n^3 e^n}}$: Posto $a_n = \frac{(e^{\alpha^2-1})^n}{n^3 e^n} > 0$, osserviamo che $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e^{\alpha^2-1}}{e}$

Per il criterio della radice n-esima possiamo dire che la serie data è convergente se $e^{\alpha^2-2} < 1$ e diverge positiv.

se $e^{\alpha^2-2}>1$. Notiamo che se $e^{\alpha^2-2}=1$, la serie data risulta essere $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ ed è quindi convergente. In definitiva, abbiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{\begin{cases} <+\infty & \text{se } \alpha\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right] \\ +\infty & \text{altrimenti.}\end{cases}}$ □

b) $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} |\log(2+\alpha)|^n}$: questa serie possiamo vederla come serie geometrica; essa risulta convergente $\iff |\log(2+\alpha)|<1$, mentre risulta divergente positiv. se $|\log(2+\alpha)|\geq 1$.

Si può applicare anche il criterio della radice n-esima.

Poiché $-1<\log(2+\alpha)<1 \iff \frac{1}{e}<(2+\alpha)<e \iff \frac{1}{e}-2<\alpha<e-2$, abbiamo in definitiva che $\sum_{n=0}^{+\infty}|\log(2+\alpha)|^n$ è convergente $\iff \alpha\in\left]\frac{1}{e}-2, e-2\right[$, mentre è dir. positiv. per tutti gli $\alpha\in\left]-2,+\infty\right[\setminus \left]\frac{1}{e}-2,e-2\right[$. ■

13.7) $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left[\log\left(1+\frac{3}{n}\right)-\frac{\alpha}{n}\right]\sqrt{n}}_{a_n}}$: Osserviamo che $a_n = \left[\frac{3}{n}-\frac{9}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{\alpha}{n}\right]\sqrt{n}$ per $n\to+\infty$

Ne segue che, per $n\to+\infty$,

$$a_n \sim \begin{cases} -\frac{9}{2n^2}\cdot\sqrt{n} & \text{se } \alpha=3 \\ \frac{3-\alpha}{n}\cdot\sqrt{n} & \text{se } \alpha\neq 3 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{9}{2n^{3/2}} & \text{se } \alpha=3 \\ \frac{3-\alpha}{\sqrt{n}} & \text{se } \alpha\neq 3. \end{cases}$$

Poiché $\sum\frac{1}{n^\beta} = \begin{cases} <+\infty & \text{se } \beta>1 \\ =+\infty & \text{se } \beta\leq 1\end{cases}$, per il criterio del confronto asintotico possiamo allora asserire che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{\begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \alpha=3 \\ \text{diverge positiv} & \text{se } \alpha<3 \\ \text{diverge negativ.} & \text{se } \alpha>3 \end{cases}}.$$ ■

13.8) $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{4^n(\operatorname{arctg} x)^n}{(n+\sin n)\pi^n}}_{a_n}}$ i) $\sum_{n=2}^{+\infty}|a_n|$: oss. che $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{4|\operatorname{arctg} x|}{\sqrt[n]{(n+\sin n)}\,\pi} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{4|\operatorname{arctg} x|}{\pi}$

Risulta allora che la serie data è assolut. convergente se $\frac{4}{\pi}|\operatorname{arctg} x|<1$, ossia $|\operatorname{arctg} x|<\frac{\pi}{4}$. Inoltre, se $\left|\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x\right|=1$ allora la serie $\sum a_n = \sum_n \frac{1}{n+\sin n}$ che è divergente positiv.

In definitiva, la serie data è assolut. convergente $\iff -1<x<1$.

b) Ovviamente, $\forall\ -1<x<1$, la serie risulta anche convergente (semplicemente). Per $x=-1$, la serie risulta divergente poiché è $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n+\sin n}$.
Per $x=1$, la serie risulta $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+\sin n}$ che risulta convergente poiché soddisfa tutte le ipotesi del criterio di Leibniz.
Infine, per $|x|>1$, abbiamo che $\frac{4^n\,|\mathrm{arctg}\,x|^n}{(n+\sin n)\,\pi^n} = \Big(\underbrace{\frac{4|\mathrm{arctg}\,x|}{\pi}}_{>1}\Big)^n \frac{1}{n+\sin n}$ $\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, e quindi non è soddisfatta la cond. nec. per la convergenza di una serie. In definitiva, la serie data è convergente (semplicemente) per $x\in\,]-1,1]$.

13.9) i) $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n\sqrt{n}+1)2^n}}$: Poniamo $a_n = \frac{1}{(n\sqrt{n}+1)2^n}$. Segue che $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ e quindi il raggio di convergenza della serie data è $\boxed{r=2}$.
Risulta allora che la serie data converge sicuramente per $x\in\,]-2,2[$.
Notiamo che per $x=\pm 2$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^n}{(n\sqrt{n}+1)2^n}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}+1}$, che converge per il criterio del confronto asintotico poiché $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}<+\infty$.
Possiamo concludere che l'insieme di converg. della serie è $E=[-2,2]$.

ii) $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^2}}{n^2}\,x^n}$ Poniamo $a_n = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^2}}{n^2}$. Segue che $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}}{\sqrt[n]{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-2}$ e quindi il raggio di convergenza della serie data è $\boxed{r=e^2}$.
Risulta allora che la serie data converge sicuramente per $x\in\,]-e^2,e^2[$.
Notiamo che per $x=\pm e^2$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^2}x^n}{n^2}\right|$ risulta convergente poiché $^{(*)}$ $\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^2}e^{2n}}{n^2} \sim \frac{1}{e n^2}$ per $n\to+\infty$;
La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ è convergente e quindi per il criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^2}e^{2n}}{n^2}<+\infty$.

$(*)$ $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n^2}e^{2n} = e^{2n^2\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}e^{2n}$
$= e^{2n^2\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$

Possiamo concludere che l'insieme di convergenza della serie data è $\underline{\underline{E = [-e^2, e^2]}}$. $\square$

iii) $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n+\sqrt[3]{n}}}$ Abbiamo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n$ con $a_n = \frac{1}{n+\sqrt[3]{n}}$. Abbiamo $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ e quindi $\boxed{r = 1}$.

Allora la serie data converge sicuramente $\underline{\underline{\forall x \in]-2, 0[}}$.

Segue facilmente che la serie converge anche in $x = -2$, poiché sono soddisfatte tutte le ipotesi del criterio di Leibniz, ma non converge per $x = 0$.

In definitiva, l'insieme di convergenza è dato da $\underline{\underline{E = [-2, 0[}}$ ■

13.10) i) $\underline{\underline{E = [0, 1[}}$; ii) $\underline{\underline{E =]0, +\infty[}}$; iii) $\underline{\underline{E =]-\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}[}}$. ■

13.11) i) $F(x) = \int_0^x e^t \operatorname{arctg} t$: dal TFC segue $F'(x) = e^x \operatorname{arctg} x \quad \forall x \in [-1, 1]$

Da questa relazione segue essendo $f(x)$ derivabile due volte che

$$F''(x) = e^x \operatorname{arctg} x + \frac{e^x}{1+x^2} \quad \forall x \in [-1, 1] \text{ e } F'''(x) = e^x \operatorname{arctg} x + \frac{2e^x}{1+x^2} + \frac{-2xe^x}{(1+x^2)^2} \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Risulta allora che il polinomio di Taylor di ordine 3 di $F(x)$ centrato in $x_0 = 0$, è dato da

$$\underline{\underline{P_3(x)}} = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2} x^2 + \frac{F'''(0)}{3!} x^3 = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3!} x^3 = \underline{\underline{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}}. \quad \square$$

ii)
$$\lim_{x\to0^+} \frac{F(x) + \log(1+x) - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to0^+} \frac{\cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \cancel{x} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$
$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \boxed{\frac{5}{6}}. \quad ■$$

13.12)
$$\lim_{x\to0^+} \frac{\int_0^x (e^{-t^2/2} - \cos t)\,dt}{\sin x^5} =$$

$f(x)$ $g(x)$

Osserviamo che il limite si presenta nella forma i) $\left[\frac{0}{0}\right]$ ii) $g(x) = \sin x^5$ ha derivata $g'(x) = 5x^4 \cos x \neq 0$ in un intorno destro di 0 iii) $\lim_{x\to0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{\text{TFC}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{5x^4 \cos x}$. Ora

$$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{5x^4 \cos x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{2\cdot4} + o(x^4) - \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}{5x^4 \cos x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{5x^4 \cos x}$$
$$= \boxed{\frac{1}{60}}$$

Applicando il teor. di de l'Hôpital si deduce che il limite dato vale $\boxed{\frac{1}{60}}$. ■

13.13) $F(x) = \int_0^x (t^2-3t+2)\,\mathrm{arctg}\left(\log(1+t^2)\right) dt$. Dal TFC si deduce che $F'(x) = (x^2-3x+2)\,\mathrm{arctg}\left(\log(1+x^2)\right)$ e si ha $F'(x)=0 \iff \underline{\underline{x=1,\ x=2 \text{ e } x=0}}$. Essi sono i pt. critici per F.

Abbiamo

	$x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<2$	2	$x>2$
x^2-3x+2	+	+	+	0	−	0	+
$\mathrm{arctg}\left(\log(1+x^2)\right)$	+	0	+	+	+	+	+
$F'(x)$	+	0	+	0	−	0	+
$F(x)$	↗		↗		↘		↗

Risulta che $x=1$ è un pt. di max. loc. stretto per F, mentre $x=2$ è un pt. di min. loc. stretto per F. $x=0$ non è né un pt. di minimo loc. né un pt. di massimo loc. per F. ■