Università di Trento – Dip. di Ingegneria e Scienza dell'informazione
CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa
a.a. 2017-2018 – Foglio di esercizi 15 "stiamo per convergere... – integrali impropri ed eq. differenziali"!

15.1) i)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\overbrace{\int_{2x}^{x^2} \sqrt{1-t^2}\,dt + 2x - x^2}^{f(x)}}{\underbrace{x^3}_{g(x)}}.$$ Il limite si presenta nella forma indet. $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Inoltre, $g'(x) = 3x^2 \neq$ in un intorno destro di 0. Oss. che

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TFC + derivata} \\ \text{fnz. composta}}}{=} \frac{\left(\sqrt{1-x^4}\cdot 2x - \sqrt{1-4x^2}\cdot 2 + 2 - 2x\right)}{3x^2} = \frac{\left(1-\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)\cdot 2x - \left(1-\frac{4x^2}{2}+o(x^2)\right)2 \; +2-2x}{3x^2}$$

$$= \frac{\cancel{2x} - x^5 + o(x^5) \cancel{-2} + 4x^2 + o(x^2) \cancel{+2} \cancel{-2x}}{3x^2}$$

$$\xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{4}{3}.$$

Dal teorema di de l'Hôpital segue dunque che il limite dato vale $\underline{\underline{\frac{4}{3}}}$. □

ii) $f(x) = \sin x - \int_0^x e^{-t^2}\,dt$ $\quad f(0)=0 \quad f'(x) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{TFC}}}{=} \cos x - e^{-x^2} \Rightarrow f'(0) = 1-1 = 0$

$f''(x) = -\sin x + 2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x + 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} \quad f'''(0) = 1$

Quindi $f(x) = \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$. Risulta che l'ordine di infinitesimo è $\underline{\underline{n=3}}$ e pp. $\underline{\underline{\frac{x^3}{6}}}$. (*)

15.2) i) $\boxed{\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}}_{f}\,dx}$ $\qquad f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continua, >0.

Osserviamo che

per $x \to 0^+$ $\quad f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. $\qquad \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} < +\infty\right)$

per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}\,x} = \frac{1}{x^{3/2}}$. $\qquad \left(\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx < +\infty\right)$

Per il criterio del confronto asintotico si conclude subito che l'integrale generalizzato dato è convergente.

Notiamo che

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \sqrt{x}=t \\ x=t^2 \quad dx=2t\,dt}}{=} \int \frac{1}{\cancel{t}(1+t)^2}\,2\cancel{t}\,dt = -\frac{2}{1+t} + c = -\frac{2}{1+\sqrt{x}} + c$$

$c \in \mathbb{R}$.

(*) Si può anche procedere così: det. $\alpha > 0$ t.c. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^\alpha}$ $\exists$ finito $\neq 0$. Appl. TFC + de l'Hôpital $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-x^2}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$ $\exists$ finito $\neq 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$ pp. $\frac{x^3}{6}$. □

Per definizione di integrale improprio abbiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,dx + \lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{2}{1+\sqrt{x}}\right]_\varepsilon^1 + \lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{2}{1+\sqrt{x}}\right]_1^M$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-1+\frac{2}{1+\sqrt{\varepsilon}}\right] + \lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{2}{1+\sqrt{M}}+1\right] = \underline{\underline{2}} \qquad \square$$

ii) $\boxed{\int_{-\infty}^{1} \underbrace{\frac{3}{x^2+2x+3}}_{f}\,dx}$ $\qquad f:]-\infty,1] \to \mathbb{R}$ continua >0

Oss. che per $x \to -\infty$ $\quad f(x) \sim \frac{3}{x^2}$ $\qquad \left(\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx<+\infty\right)$.

Per il criterio del confronto asintotico, segue subito che l'integrale generalizzato dato è convergente.

$$\int \frac{3}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{3}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{3}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 3\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c .$$

Per definizione di integrale improprio abbiamo

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{3}{x^2+2x+3}\,dx = \lim_{k\to-\infty}\int_k^1 \frac{3}{x^2+2x+3}\,dx = \lim_{k\to-\infty}\left[\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\right]_k^1$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}) - \frac{3}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2} + \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}}}. \qquad \blacksquare$$

15.3) i) $\boxed{\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt[3]{x}}}_{f}\,dx}$ $\qquad f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continua, >0.

Oss. che $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}$

Abbiamo che

per $x \to 0^+$, $\quad f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\qquad \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx<+\infty\right)$

per $x\to+\infty$, $\quad f(x) \sim \frac{1}{2\sqrt[3]{x}\,x} = \frac{1}{2x^{4/3}}$. $\qquad \left(\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{4/3}}\,dx<+\infty\right)$

Per il criterio del confronto asintotico segue subito che l'integrale generalizzato dato è convergente.

ii) $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \underbrace{\frac{\sin\sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}\ \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}}}_{f}\,dx}$

$f:]0,1[\to \mathbb{R}$ continua, >0

Oss. che $f(x) = \dfrac{\sin\sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}\ \sqrt[3]{1+x}\ \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}}$.

Abbiamo che per $x\to 0^+$ $\quad f(x) \sim \dfrac{\sin 1}{\sqrt[4]{x}} \qquad \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx<+\infty\right)$

per $x \to 1^-$ $\quad f(x) \sim \dfrac{\left(\sqrt[4]{1-x}\right)4}{\sqrt[3]{1-x}\ \ \pi\sqrt[3]{2}}$

$$= \frac{4}{\pi\sqrt[3]{2}}\ \frac{1}{(1-x)^{1/3-1/4}} \qquad \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}<1$$

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^{1/12}}dx<+\infty\right)$$

Per il criterio del confronto asintotico segue che l'integrale generalizzato dato risulta convergente.

15.4) i) $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^\alpha}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{f}dx}$

$f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continua, >0

Abbiamo che $f(x) \sim \dfrac{1}{x^\alpha}\cdot\dfrac{\pi}{2}$ per $x\to 0^+$ e

$f(x) \sim \dfrac{1}{x^\alpha}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \to +\infty$.

Quindi l'integrale improprio dato risulta convergente se e solo se

$\alpha<1$ e $\alpha+\frac{1}{2}>1$, ossia se e solo se $\underline{\underline{\frac{1}{2}<\alpha<1}}$.

Sempre usando il criterio del confronto asintotico e il fatto che $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx<+\infty \iff \alpha<1$; $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx<+\infty \iff \alpha>1$.

ii) $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{(x+1-\cos x)^{3\alpha}\operatorname{arctg}(x^{-3})}{(x^2+x)^{\alpha/3}\ \operatorname{arctg}x^2}}_{f}dx}$

$f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continua, >0.

Abbiamo che

per $x\to 0^+$ $\quad f(x) \sim \dfrac{x^{3\alpha}\cdot\pi/2}{x^{\alpha/3}\cdot x^2} = \dfrac{\pi}{2}\ \dfrac{1}{x^{\alpha/3+2-3\alpha}}$

per $x \to +\infty$ $\quad f(x) \sim \dfrac{x^{3\alpha}\cdot\frac{1}{x^3}}{x^{2\alpha/3}\cdot\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}\ \dfrac{1}{x^{2\alpha/3+3-3\alpha}}$

Quindi l'integrale improprio dato risulta convergente se e solo se

$\frac{\alpha}{3}-3\alpha+2<1$ e $\frac{2\alpha}{3}-3\alpha+3>1 \iff \underline{\underline{\frac{3}{8}<\alpha<\frac{6}{7}}}$

15.5) i) $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \underbrace{\frac{\sin\sqrt{1-x}}{\left(\operatorname{tg}\sqrt{1-x}\right)\left(1-\cos x^{2\alpha}\right)}}_{f}dx}$

$f:]0,1[\to \mathbb{R}$ continua, >0

Abbiamo che

per $x \to 0^+$ $\quad f(x) \sim \dfrac{(\sin 1)\, 2}{(\operatorname{tg} 1)\,(x^{2\alpha})^2} = \dfrac{2 \sin 1}{(\operatorname{tg} 1)\, x^{4\alpha}}$

D'altra parte, abbiamo $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{1-\cos 1}$; quindi in $x=1$, l'integrale dato non è improprio. Abbiamo allora che l'integrale dato è convergente $\iff 4\alpha < 1$, ossia $\underline{\underline{\alpha < \frac{1}{4}}}$. □

ii) $\boxed{\displaystyle\int_1^3 \underbrace{\frac{e^{\sqrt[3]{3-x}} - 1}{\sqrt{(x-1)^{4\alpha}\,(3-x)^{2\alpha}}}}_{f}\, dx}$ $\qquad f : \,]1,3[\, \to \mathbb{R}$ continua, >0

Abbiamo che

per $x \to 1^+$ $\quad f(x) \sim \dfrac{e^{\sqrt[3]{2}} - 1}{(x-1)^{2\alpha}\, 2^{2\alpha}}$

per $x \to 3^-$ $\quad f(x) \sim \dfrac{\sqrt[3]{3-x}}{2^{2\alpha}\,(3-x)^{2\alpha}} = \dfrac{1}{4^{\alpha}\,(3-x)^{2\alpha - 1/3}}$.

L'integrale dato risulta dunque convergente $\iff 2\alpha < 1$ e $2\alpha - \frac{1}{3} < 1 \iff \alpha < \frac{1}{2}$ e $\alpha < \frac{2}{3}$. In definitiva, l'integrale improprio dato risulta convergente $\iff \underline{\underline{\alpha < \frac{1}{2}}}$. ■

15.6) i) $\boxed{\begin{cases} y'(x) = \operatorname{arctg} x \\ y(0) = 1. \end{cases}}$ $\iff y(x) = \displaystyle\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c.$$

Ora $1 = y(0) \iff 1 = c$. Risulta quindi che la soluzione del probl. di Cauchy dato in i) è $\underline{\underline{y(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + 1}}$ $\quad \underline{\underline{x \in I = \mathbb{R}}}$. □

ii) $\boxed{\begin{cases} y'(x) = e^x \cos x \\ y(0) = 0. \end{cases}}$ $\iff y(x) = \displaystyle\int e^x \cos x\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integrando per} \\ \text{parti}}}{=} \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} + c$

Ora $0 = y(0) \iff c = -\frac{1}{2}$. Risulta quindi che la soluzione del probl. di Cauchy dato in ii) è $\underline{\underline{y(x) = \frac{e^x(\cos x + \sin x)}{2} - \frac{1}{2}}}$, $\quad \underline{\underline{x \in I = \mathbb{R}}}$.

■

15.7) i) $\boxed{\begin{cases} y'(x) = x(\cos x + e^x) \\ y(0) = 1. \end{cases}}$ $\iff$ $y(x) = \int x\cos x \, dx + \int x e^x \, dx =$

$= x \sin x - \int \sin x \, dx + x e^x - \int e^x$

$= x \sin x + \cos x + x e^x - e^x + c$

Ora $y(0) = 1$ $\iff$ $1 = \cancel{1} - \cancel{1} + c$. Risulta quindi che la soluzione del pblm. di Cauchy dato in i) è $y(x) = x(\sin x + e^x) + (\cos x - e^x) + 1$, $x \in I = \mathbb{R}$.

□

ii) $\boxed{\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2} \\ y(3) = 1. \end{cases}}$ $\iff$ $y(x) = \int \frac{x}{(x-2)(x-1)} dx = \int \frac{2}{x-2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx$

$= 2\log|x-2| - \log|x-1| + c$

$y(x) = \log \frac{(x-2)^2}{|x-1|} + c$

Ora $y(3) = 1$ $\iff$ $1 = y(3) = \cancel{\log 1} - \log 2 + c$ $\iff$ $c = 1 + \log 2$.

Risulta quindi che la soluzione del pblm. di Cauchy dato in ii) è

$y(x) = \log \frac{(x-2)^2}{|x-1|} + 1 + \log 2$, $x \in I =]2, +\infty[$.

■

15.8) i) $\boxed{y'(x) = \frac{y(x)}{x}}$.

Notiamo che $y(x) \equiv 0$ su $]-\infty, 0[$ (o su $]0, +\infty[$) è soluzione dell'eq. diff. data. Poiché nessun'altra soluzione dell'eq. diff data si annullerà in qualche pt. (*), l'eq. diff data risulta equiv. a $\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{x}$; ne segue $\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \frac{1}{x} dx$, ossia $\log|y(x)| = \log|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Ricaviamo $|y(x)| = e^{\log|x| + c}$, $c \in \mathbb{R}$, ossia $|y| = k|x|$ $k > 0$, $x > 0$ (oppure $x < 0$).

Tutte le soluzioni dell'eq. diff. data si scrivono $y(x) = k|x|$, $k \in \mathbb{R}$ su $]-\infty, 0[$ oppure su $]0, +\infty[$.

□

ii) $\boxed{y'(x) + y^2(x) \sin x = 0}$

Procediamo come in i). La funzione $y(x) \equiv 0$ è soluz. dell'eq. diff. data.

(*) Questo fatto segue dal teorema di esistenza ed unicità locale per il pblm di Cauchy associato a $y'(x) = \frac{y(x)}{x}$

Poiché nessun'altra soluzione dell'eq. diff. data si annullerà in qualche pt., l'eq. diff. data potrà essere scritta come $-\frac{y'(x)}{y^2(x)} = \sin x$; ne segue che $\frac{1}{y(x)} = -\cos x + c$, $c \in \mathbb{R}$; risulta $y(x) = \frac{1}{c - \cos x}$, $x \in I$. $\square$

iii) $y'(x)\,y(x) = x\,(2 + y^2(x)) \iff \frac{y'(x)\,y(x)}{2 + y^2(x)} = x$ e quindi

$\frac{1}{2}\log(2 + y^2(x)) = \frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Quindi $2 + y^2(x) = k e^{x^2}$, $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$. Otteniamo $y^2(x) = k e^{x^2} - 2$,

con $y(x) = \pm\sqrt{k e^{x^2} - 2}$, $x \in I$. $\blacksquare$