Università di Trento – Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e
Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa

a.a. 2017–18 – Foglio 16 – ..." L'Universo è un'eq. differenziale" [H. Poincaré] ...

16.1) i) $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x+2}{x+1}\, y(x) \\ y(1) = 3 \end{cases}$

L'eq. data è definita per $x \neq -1$, con un'unica soluzione singolare data da $y(x) \equiv 0$, per $x > -1$ che però non risolve il prob. di Cauchy. Consideriamo allora

$\displaystyle\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,dx = \int \frac{x+2}{x+1}\,dx$, ossia $\log|y(x)| = x + \log|x+1| + C$, e passando all'esponenziale in entrambi i membri si giunge a $|y(x)| = k|x+1|e^x$, $k>0$.

Imponendo $3 = y(1)$ si ha $3 = 2ke$ da cui $k = \frac{3}{2e}$. Otteniamo che nell'intervallo $]-1,+\infty[$ la soluzione del prob. di Cauchy dato è

$\underline{\underline{y(x) = \frac{3}{2}(x+1)\,e^{x-1}}}$. $\square$

ii) $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)\log y(x)}{x} \\ y(-1) = 2 \end{cases}$

L'eq. è definita per $x \neq 0$ e $y(x) > 0$ e ha come soluzione singolare $y(x) \equiv 1$ per $x < 0$. Questa soluzione però non soddisfa il dato iniziale. Possiamo allora procedere considerando

$$\frac{y'(x)}{y(x)\log y(x)} = \frac{1}{x} \quad \text{e quindi} \quad \int \frac{y'(x)}{y(x)\log y(x)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx.$$

Risulta $\log(\log y(x)) = \log|x| + c$, da cui $\log y(x) = e^c|x|$, $c \in \mathbb{R}$.

Otteniamo $y(x) = e^{k|x|}$, $k > 0$. Imponendo la condizione iniziale $2 = e^k$ si ottiene $\underline{y(x)} = e^{\log 2\,|x|} = e^{-x\log 2} = \underline{\underline{\frac{1}{2^x}}}$ su $]-\infty, 0[$. $\blacksquare$

16.2) i) $\boxed{y'(x) - 3y(x) = e^x}$ $\iff y'(x) = 3y(x) + e^x$

Dalla formula risolutiva per le eq. diff. lineari del primo ordine con $a(x) = 3$ e $b(x) = e^x$ si ottiene che l'integrale generale è dato da

$$y(x) = e^{3x}\left(c + \int e^x e^{-3x}\,dx\right) = e^{3x}\left(c + \int e^{-2x}\,dx\right) =$$

$$y(x) = e^{3x}\left(c + \frac{e^{-2x}}{-2}\right) = \underline{\underline{ce^{3x} - \tfrac{1}{2}e^{x}}}\,. \qquad \text{su } \mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}$$

□

ii) $\boxed{y'(x) - xy(x) = e^x(-x+1)}$ $\qquad y'(x) = \underbrace{x}_{a(x)}y(x) + \underbrace{e^x(-x+1)}_{b(x)},$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(c + \int e^x(-x+1)e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)$$
$$= e^{\frac{x^2}{2}}\left(c + \int(-x+1)e^{-\frac{x^2}{2}+x}\,dx\right) = e^{\frac{x^2}{2}}\left(c + e^{-\frac{x^2}{2}+x}\right)$$
$$= \underline{\underline{ce^{\frac{x^2}{2}} + e^x}} \qquad \text{su } \mathbb{R}, \ c\in\mathbb{R}.$$

□

iii) $\boxed{y'(x) + (x+3)y(x) = y(x) + x + 2}$ $\qquad y'(x) = \underbrace{(-x-2)}_{a(x)}y(x) + \underbrace{x+2}_{b(x)}$

$$y(x) = e^{\left(-\frac{x^2}{2}-2x\right)}\left(c + \int(x+2)e^{\frac{x^2}{2}+2x}\,dx\right)$$
$$= e^{\left(-\frac{x^2}{2}-2x\right)}\left(c + e^{\frac{x^2}{2}+2x}\right)$$
$$= \underline{\underline{ce^{-\frac{x^2}{2}-2x} + 1}} \qquad \text{su } \mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}.$$

□

iv) $\boxed{y'(x) - y(x) = \operatorname{sen} x}$ $\qquad y'(x) = \underbrace{+}_{a(x)}y(x) + \underbrace{\sin x}_{b(x)}$

$$y(x) = e^x\left(c + \int \sin x\, e^{-x}\,dx\right)$$

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = \frac{e^{-x}}{-1}\sin x + \int e^{-x}\cos x\,dx$$
$$= -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x$$
$$\int e^{-x}\sin x\,dx = \frac{-e^{-x}(\sin x + \cos x)}{2}$$

$$= e^x\left(c - \frac{e^{-x}(\sin x + \cos x)}{2}\right)$$
$$= \underline{\underline{ce^x - \frac{(\sin x + \cos x)}{2}}} \qquad c\in\mathbb{R} \text{ su } \mathbb{R}.$$

■

16.3) i) $\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{2y(x)}{x} + x^3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $\qquad$ su $]0,+\infty[$

L'integrale generale dell'eq. diff. data è

$$y(x) = e^{-2\log x}\left(c + \int x^3 e^{2\log x}\,dx\right)$$

$$y(x) = \frac{1}{x^2}\left(c + \int x^3 \cdot x^2\, dx\right)$$
$$= \frac{1}{x^2}\left(c + \frac{x^6}{6}\right) = \underline{\underline{\frac{c}{x^2} + \frac{x^4}{6}}} \quad \text{su }]0,+\infty[$$

Imponendo $1 = y(1) = c + \frac{1}{6}$ segue $c = \frac{5}{6}$ e la soluzione del pbm. di Cauchy in i) è $\underline{\underline{y(x) = \frac{5}{6x^2} + \frac{x^4}{6} \text{ su }]0,+\infty[}}$ $\square$

ii) $\begin{cases} y'(x) = 2xy(x) + x^3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

L'integrale generale dell'eq. diff. data è

$$y(x) = e^{x^2}\left(c + \int x^3 e^{-x^2}\, dx\right)$$

ora $\int x^3 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int x^2 \underbrace{(-2x) e^{-x^2}} dx =$

$$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + \frac{1}{2}\int 2x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1). \text{ Dunque}$$

$$y(x) = e^{x^2}\left(c - \frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)\right) = \underline{\underline{c e^{x^2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}}} \text{ su } \mathbb{R}$$

Imponendo $0 = y(0) = c - \frac{1}{2}$ si ottiene $c = \frac{1}{2}$ e la soluzione del pbm. di Cauchy in ii) è $\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \text{ su } \mathbb{R}.}}$ $\blacksquare$

16A) i) $\boxed{y'' - 4y = 0}$: L'eq. caratteristica associata è $z^2 - 4 = 0$; abbiamo $z_{1/2} = \pm 2$, per cui l'integrale generale è dato da $\underline{\underline{y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}}}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$. $\square$

ii) $\boxed{y'' + 4y' = 0}$: L'eq. caratteristica associata è $z^2 + 4z = 0$; abbiamo $z_1 = 0$, $z_2 = -4$, per cui l'integrale generale è dato da $\underline{\underline{y(x) = c_1 + c_2 e^{-4x}}}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

iii) $\boxed{y'' - 2y' + 5y = 0}$: L'eq. caratteristica associata è $z^2 - 2z + 5 = 0$; abbiamo $z_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm i4}{2} = 1 \pm 2i$, per cui l'integrale generale è dato $y(x) = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ □

iv) $\boxed{y'' + 2y = 0}$: L'eq. caratteristica associata è $z^2 + 2 = 0$, da cui $z_{1/2} = \pm\sqrt{2}\,i$. L'integrale generale dell'eq. diff. data è dunque $y(x) = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ □

v) $\boxed{y'' + 4y' + 4y = 0}$: L'eq. caratteristica associata è $z^2 + 4z + 4 = 0$, da cui $z_{1/2} = -2$. L'integrale generale dell'eq. diff. data è dunque $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ ■

16.5) i) $\boxed{y'' + 4y = x^2}$: L'eq. caratt. associata all'eq. diff. omogenea è $z^2 + 4 = 0$, da cui $z_{1/2} = \pm 2i$. La soluzione generale dell'eq. diff. omogenea è dunque

$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo una soluz. particolare $\bar{y}(x)$ dell'eq. completa della forma $\bar{y}(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b, c da determinare

Abbiamo $\bar{y}'(x) = 2ax + b$, $\bar{y}''(x) = 2a$ e dunque

$\bar{y}'' + 4\bar{y} = 2a + 4ax^2 + 4bx + 4c = 4ax^2 + 4bx + 2a + 4c$

$\bar{y}$ sarà soluzione dell'eq. completa $\Leftrightarrow$ $4a = 1$, $4b = 0$, $2a + 4c = 0$. Dunque deve essere $a = \frac{1}{4}$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{8}$.

In conclusione, la soluzione generale dell'eq. completa è data da $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ □

ii) $\boxed{y'' + y = 3\cos x}$: L'eq. caratteristica associata all'eq. diff. omogenea è $z^2 + 1 = 0$, da cui $z_{1/2} = \pm i$. La soluzione generale dell'eq. diff. omogenea è dunque

$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ dell'eq. completa della forma $\bar{y}(x) = hx\sin x + kx\cos x$ con h,k da determinare. Abbiamo

$\bar{y}'(x) = h\sin x + hx\cos x + k\cos x - kx\sin x$

$\bar{y}''(x) = 2h\cos x - hx\sin x - 2k\sin x - kx\cos x$, e dunque

$\bar{y}'' + \bar{y} = 2h\cos x - \cancel{hx}\sin x - 2k\sin x - \cancel{kx}\cos x + \cancel{hx\sin x} + \cancel{kx\cos x}$

$= 2h\cos x - 2k\sin x.$

$\bar{y}$ sarà soluzione dell'eq. completa $\Leftrightarrow$ $2h = 3$, $-2k = 0$.

In conclusione, l'integrale generale dell'eq. completa è dato da $\underline{\underline{y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{3}{2}x\sin x}}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ □

iii) $\boxed{y'' + y = 3\sin 2x}$: Abbiamo provato in ii) che l'integrale generale dell'eq. diff. omogenea è dato da $\underline{y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Cerchiamo in questo caso una soluz. particolare $\bar{y}(x)$ dell'eq. diff. completa della forma $\bar{y}(x) = h\sin 2x + k\cos 2x$ con h,k da determinare. Abbiamo

$\bar{y}'(x) = 2h\cos 2x - 2k\sin 2x$, $\bar{y}''(x) = -4h\sin 2x - 4k\cos 2x$ e dunque $\bar{y}'' + \bar{y} = -3h\sin 2x - 3k\cos 2x$;

$\bar{y}$ sarà soluzione dell'eq. diff. completa $\Leftrightarrow$ $-3h = 3$, $-3k = 0$. In conclusione, l'integrale generale dell'eq. diff. completa è dato da $\underline{\underline{y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x - \sin 2x}}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. □

iv) $\boxed{y'' + y' = x^2 + x + 1}$: L'integrale generale dell'eq. diff. omogenea associata è dato da $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

(si prova come in 16.4) ii))

Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x)$ dell'eq. diff. completa della forma $\bar{y}(x) = x(ax^2 + bx + c)$, con a,b,c

$= ax^3 + bx^2 + cx$

da determinare. Da $\bar{y}(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ si ottiene

$\bar{y}'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $\bar{y}''(x) = 6ax + 2b$ e dunque

$\bar{y}'' + \bar{y}' = 6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx + c = 3ax^2 + (2b + 6a)x + 2b + c$

$\bar{y}$ sarà soluzione dell'eq. completa $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 1 \\ 2b + 6a = 1 \\ 2b + c = 1 \end{cases}$

da cui $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 2$.

In conclusione, l'integrale generale dell'eq. diff. completa

è dato da $\underline{\underline{y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x}}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. □

vi) $\boxed{y'' - 2y' - 3y = 2e^{\alpha x}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'eq. caratteristica associata all'eq. diff. omogenea è

$z^2 - 2z - 3 = 0$, ossia $(z-3)(z+1) = 0$ da cui $z_1 = -1$, $z_2 = 3$.

La soluzione generale dell'eq. diff. omogenea è dunque

$\underline{y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Se $\underline{\underline{\alpha \neq -1, 3}}$ cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}(x) = he^{\alpha x}$

con h da determinare. Abbiamo

$\bar{y}'(x) = \alpha h e^{\alpha x}$ $\bar{y}''(x) = \alpha^2 h e^{\alpha x}$ e

$\bar{y}'' - 2\bar{y}' - 3\bar{y} = (\alpha^2 h - 2h\alpha - 3h)e^{\alpha x}$. $\bar{y}$ sarà soluzione

dell'eq. completa $\Leftrightarrow$ $h(\alpha^2 - 2\alpha - 3) = 2$ ossia $h = \dfrac{2}{\alpha^2 - 2\alpha - 3}$

In questo caso allora l'integrale generale dell'eq. diff.

completa è dato da $\underline{\underline{y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \dfrac{2}{\alpha^2 - 2\alpha - 3} e^{\alpha x}}}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

Se $\underline{\alpha = -1, \text{ oppure } \alpha = 3}$ dobbiamo cercare una soluzione

particolare $\bar{y}(x)$ dell'eq. completa della forma $\bar{y}(x) = hxe^{\alpha x}$

con h da determinare. Abbiamo $\bar{y}'(x) = he^{\alpha x} + h\alpha x e^{\alpha x}$

$\bar{y}''(x) = 2h\alpha e^{\alpha x} + h\alpha^2 x e^{\alpha x}$. $\bar{y}$ sarà soluzione dell'eq.

completa $\Leftrightarrow$ $e^{\alpha x}\left[2h\alpha + h\alpha^2 x - 2h - 2h\alpha x - 3hx\right] = 2e^{\alpha x}$

per $\alpha=-1$ $\quad e^{-x}\left[-2h+\cancel{hx}-2h+2\cancel{h}x-3\cancel{hx}\right]=2e^{-x}$

$\iff -4h=2 \quad h=-\frac{1}{2}$

per $\alpha=3$ $\quad e^{3x}\left[6h+9\cancel{hx}-2h-6\cancel{hx}-3\cancel{hx}\right]=2e^{3x}$

$4h=2 \quad h=\frac{1}{2}$

Quindi, per $\underline{\underline{\alpha=-1}}$, l'integrale generale è dato da

$$\underline{\underline{y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-\frac{1}{2}xe^{-x}}} \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}$$

per $\alpha=3$ $\quad \underline{\underline{y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}+\frac{1}{2}xe^{3x}}} \qquad c_1,c_2\in\mathbb{R},\ x\in\mathbb{R}$

16.6) i) $y_1(x)=\sin 2x \quad y_2(x)=\cos 2x \quad \rightsquigarrow z_{1/2}=\pm 2i$

$$(z-2i)(z+2i)=z^2+4$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y''+4y=0}}$$

ii) $y_1(x)=e^x\sin\sqrt{3}x \quad y_2(x)=e^x\cos\sqrt{3}x \quad \rightsquigarrow z_{1/2}=1\pm\sqrt{3}i$

$$(z-(1-\sqrt{3}i))(z-(1+\sqrt{3}i))=z^2-z-\cancel{\sqrt{3}i}z-z+\cancel{\sqrt{3}i}z+4$$

$$=z^2-2z+4$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y''-2y'+4y=0}}\ .$$

iii) $y_1(x)=1 \quad y_2(x)=x \quad \rightsquigarrow z_1=0,\ z_2=0 \quad z^2=0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y''=0}}\ .$$

iv) $y_1(x)=e^{-2x} \quad y_2(x)=e^{3x} \quad \rightsquigarrow z_1=-2,\ z_2=3$

$$(z+2)(z-3)=z^2-z-6$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y''-y'-6y=0}}$$

16.7) i) Abbiamo ottenuto che l'integrale generale dell'eq. diff. data è

Es. 16.4) vi) $\quad y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}-\frac{1}{2}xe^{-x}$

Imponendo $y(0)=0$ si ottiene $\begin{cases}0=c_1+c_2 \\ 1=-c_1+3c_2-\frac{1}{2}\end{cases}$ $\iff c_1=-c_2$

$y'(0)=1$ " $\qquad 1=c_2+3c_2-\frac{1}{2}$

$$4c_2 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{3}{8} \qquad c_1 = -\frac{3}{8}$$

la soluzione del probl. di Cauchy risulta $\underline{\underline{y(x) = -\frac{3}{8}e^{-x} + \frac{3}{8}e^{3x} - \frac{1}{2}xe^{-x}}}$

$\square$

ii) Abbiamo ottenuto che l'integrale generale dell'eq. diff. data è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \frac{2}{-4}e^{x} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{1}{2}e^{x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Imponendo $1 = y(0)$ si ottiene, $0 = y'(0)$ si ottiene

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 - \frac{1}{2} \\ 0 = -c_1 + 3c_2 - \frac{1}{2}, \end{cases}$$

da cui $c_1 = 1$, $c_2 = \frac{1}{2}$.

La soluzione del probl. di Cauchy risulta $\underline{\underline{y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{x}}}$ $x \in \mathbb{R}$

$\blacksquare$

16.8) i) $$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}}\,dx = \lim_{M \to +\infty} \left[\int_0^M x^3 e^{-x^2}\,dx \right]$$

Ora $$\int x^3 e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int x^2 \underbrace{(-2x)e^{-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\left[x^2 e^{-x^2} - \int 2x e^{-x^2}\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2}\right] + c = -\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1) + c$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}}\,dx = \lim_{M \to +\infty} \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1) \right]_0^M = \lim_{M \to +\infty} \left[-\frac{e^{-M^2}}{2}(M^2+1) + \frac{1}{2} \right] = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$\square$

ii) • $F(x) = 1 - \int_0^x t^3 e^{-t^2}\,dt$ $\quad x \in \left]-\infty, +\infty\right[$

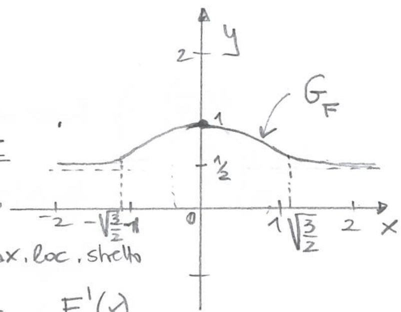
$$F(-x) = 1 - \int_0^{-x} t^3 e^{-t^2}\,dt \underset{\substack{t=-s \\ dt=-ds}}{=} 1 - \int_0^x (-s)^3 e^{-s^2}(-)\,ds = 1 - \int_0^x s^3 e^{-s^2}\,ds = F(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quindi F è pari.

• $$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[1 - \int_0^x t^3 e^{-t^2}\,dt \right] = 1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Essendo F pari, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \frac{1}{2}$.

$y = \frac{1}{2}$ asint. orizz.



x=0 pt. di max. loc. stretto

• $F'(x) \underset{TFC}{=} -x^3 e^{-x^2}$ su $\mathbb{R}$

$+ + + \; 0 \; - - -$ $F'(x)$, $F(x)$

• $F''(x) = -3x^2 e^{-x^2} + 2x^4 e^{-x^2} = e^{-x^2}x^2(-3+2x^2)$

$+ \; -\sqrt{\frac{3}{2}} \; - \; 0 \; - \; \sqrt{\frac{3}{2}} \; + +$ $F''(x)$

$\cup \quad \cap \quad \cup$ F

$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ pt. di flesso.

$\blacksquare$