Università di Trento – Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni
Ingegneria dell'informazione e Organizzazione d'impresa
a.a. 2017-18 – PIAZZA 4 – "... ora passi più lunghi ..."

1.1) a) $\sin(2x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \frac{\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff \frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{3} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z};$

possiamo anche scrivere $\underline{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right[}$.

$\square$

b) $0 \le \cos(x+1) < 1 \iff \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le (x+1) \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x+1 \ne 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ x \ne 2k\pi - 1 & k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$

possiamo anche scrivere

$\underline{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi\right] \setminus \{2k\pi - 1\}}.$

$\square$

c) $2\sin^2 x - \sin x > 1 \iff 2\sin^2 x - \sin x - 1 > 0.$

Poniamo $t = \sin x$ e dobbiamo risolvere $2t^2 - t - 1 > 0$. Si ha $t < -\frac{1}{2}$ o $t > 1$. Notiamo che $\sin x > 1$ non è mai verificato, mentre $\sin x < -\frac{1}{2}$ si ha $\forall x : \frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Abbiamo $\underline{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right[}$.

va bene anche $\left]-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[$ $\square$

d) $\begin{cases} 5\sin^2 x + \sin x + \cos^2 x < \frac{5}{2} \\ \sin x \ge 0 \end{cases}$

Notiamo che $5\sin^2 x + \sin x + \cos^2 x < \frac{5}{2} \underset{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}{\iff} 5\sin^2 x + \sin x + 1 - \sin^2 x < \frac{5}{2}$

$\iff 4\sin^2 x + \sin x - \frac{3}{2} < 0 \iff 8\sin^2 x + 2\sin x - 3 < 0.$

Poniamo $t = \sin x$; allora la diseq. si riscrive $8t^2 + 2t - 3 < 0$. Risulta $-\frac{3}{4} < t < \frac{1}{2}$. Abbiamo allora che il sistema dato ha come soluzioni tutti gli $x \in \mathbb{R}$: $0 \le \sin x < \frac{1}{2}$. Abbiamo

$\underline{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right]\right)}.$

$\blacksquare$

1.2) $\overline{z^2+|z|(z+1)} = \bar{z}^2+|z|(\bar{z}+1)$ (*)

Poniamo $z = x+iy$, allora $\overline{z^2+|z|(z+1)} = \overline{(x+iy)^2+\sqrt{x^2+y^2}\left((x+1)+iy\right)}$

$$= \overline{x^2+2xyi-y^2+\sqrt{x^2+y^2}\left((x+1)+iy\right)} =$$

$$= \overline{x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}\,(x+1)+\left(2xy+\sqrt{x^2+y^2}\,y\right)i}$$

$$= x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}\,(x+1)-\left(2xy+\sqrt{x^2+y^2}\,y\right)i\,.$$

D'altra parte $\bar{z}^2+|z|(\bar{z}+1) = (x-iy)^2+\sqrt{x^2+y^2}\,(x-iy+1)$

$$= x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}\,(x+1)-\left(2xy+\sqrt{x^2+y^2}\,y\right)i\,. \qquad \blacksquare$$

1.3) $z = \left(\dfrac{2+2\sqrt{3}i}{|1-\sqrt{3}i|}\right)i = \dfrac{\cancel{2}(1+\sqrt{3}i)}{\cancel{2}}\cdot i = 2\left(\dfrac{1}{2}i-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$

$$= 2\left[\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right] \quad \left(=e^{i\frac{5\pi}{6}}\right).$$

Quindi $\underline{\underline{z^3}} = 8\left(\cos\dfrac{5\pi}{\cancel{6}_2}\cdot\cancel{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{\cancel{6}_2}\cdot\cancel{3}\right) = \underline{\underline{8i}}$

$\underline{\underline{z^4}} = 16\left(\cos\dfrac{5\pi}{\cancel{6}_3}\cdot\cancel{4}^2+i\sin\dfrac{5\pi}{\cancel{6}_3}\cdot\cancel{4}^2\right) = 16\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \underline{\underline{8\left(-1-\sqrt{3}i\right)}}.$

$\blacksquare$

1.4) a) $\bar{z}z-\bar{z}+\dfrac{i}{4}=0$: poniamo $z=x+iy$; abbiamo che

$\bar{z}z-\bar{z}+\dfrac{i}{4}=0 \iff x^2+y^2-(x-iy)+\dfrac{i}{4}=0 \iff (x^2+y^2-x)+i\left(y+\dfrac{1}{4}\right)=0$

$$\iff \begin{cases} x^2-x+y^2=0 \\ y=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2-x+\frac{1}{16}=0$$

$$\iff x_{1/2} = \frac{1\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{2} = \frac{1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{3}}{4}.$$

L'insieme delle soluzioni è dato da $\underline{\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{4}i,\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{4}i\right\}}$. $\square$

b) $z|z|-3z+2i=0$: poniamo $z=x+iy$; abbiamo che

$z|z|-3z+2i=0 \iff (x+iy)\sqrt{x^2+y^2}-3(x+iy)+2i=0$

$$\iff \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2}-3x=0 \\ y\sqrt{x^2+y^2}-3y+2=0 \end{cases}$$

(*) Ovviamente si poteva usare il fatto che $\overline{z^2+|z|(z+1)} = \overline{z^2}+\overline{|z|(z+1)} = \bar{z}^2+|z|(\bar{z}+1)$. $\blacksquare$

ossia $\circledast \begin{cases} x\left(\sqrt{x^2+y^2}-3\right)=0 \\ y\sqrt{x^2+y^2}-3y+2=0 \end{cases} \iff x=0 \text{ o } \sqrt{x^2+y^2}=3.$

Se $x=0$, la seconda eq. di $\circledast$ si riduce a $y|y|-3y+2=0$:

se $y \geq 0$ si ha $y^2-3y+2=0 \iff (x-2)(x-1)=0$

$\Rightarrow y=1,\ y=2$

e quindi $z_1=i$, $z_2=2i$.

se $y<0$ si ha $-y^2-3y+2=0 \iff y^2+3y-2=0$

$\Rightarrow y=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+8}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

e quindi $z_3=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}i$.

Se $\sqrt{x^2+y^2}=3$, la seconda eq. di $\circledast$ si riduce a $\cancel{y}\cdot 3-\cancel{3y}+2=0$

che è impossibile.

Le soluzioni dell'eq. data sono quindi $\underline{z_1, z_2 \text{ e } z_3}$. ■

1.5) a) $4z^2-4z+2-\sqrt{3}i=0 \iff z_{1/2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16(2-\sqrt{3}i)}}{8}$

$=\dfrac{4\pm4\sqrt{1-2+\sqrt{3}i}}{8}$

$=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{-1+\sqrt{3}i}}{2}$.

Osserviamo che $-1+\sqrt{3}i=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

e una sua radice quadrata è data da $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

Infine $\underline{\underline{z_{1/2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}}=\underline{\underline{\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\pm\frac{\sqrt{6}}{4}i}}$. □

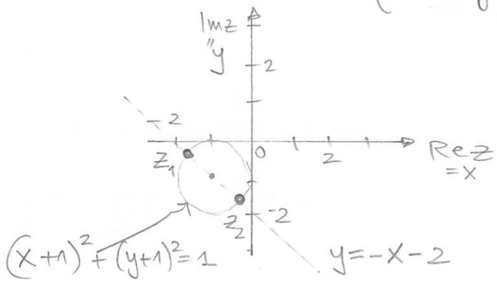
b) $z^2+2iz-1-i=0 \iff z_{1/2}=\dfrac{-2i\pm\sqrt{4+4(1+i)}}{2}$

$=-i\pm\sqrt{i}$

Ora $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$ e una sua radice quadrata è data da $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$ e quindi $z_{1/2} = -i \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\underline{z_{1/2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)i.}$$

1.6) a) $\begin{cases} |z+1+i| = 1 \\ \mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,z + 2 = 0 \end{cases} \underset{z=x+iy}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} |z+1+i|^2 = 1 \Longleftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 1 \\ x+y+2 = 0 \Longleftrightarrow y = -x-2 \end{cases}$



$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (-x-1)^2 = 1 \\ y = -x-2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4x + 1 = 0 \\ y = -x-2 \end{cases}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{z_1 = \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)} \qquad \underline{z_2 = \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

b) $\mathrm{Re}\,(3z + 5\bar{z} - z^2 - z\bar{z}) = 2\,\mathrm{Im}\,z$.

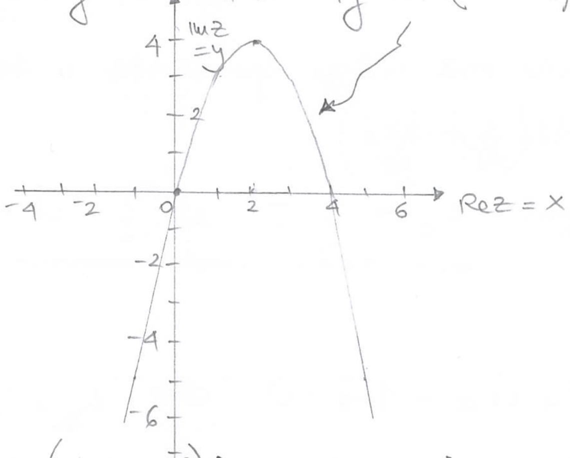
Poniamo $z = x + iy$; allora l'eq. si riscrive come

$$\mathrm{Re}\left(3(x+iy) + 5(x-iy) - (x+iy)^2 - x^2 - y^2\right) = 2y$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{Re}\left(3x + 5x - x^2 \cancel{+y^2} - x^2 \cancel{-y^2} + (3y - 5y - 2xy)i\right) = 2y$$

$$\Longleftrightarrow 8x - 2x^2 = 2y$$

$$\Longleftrightarrow 4x - x^2 = y \Longleftrightarrow y = -(x-2)^2 + 4$$



$$\underline{z = x + (4x - x^2)i \quad \text{al variare di } x \in \mathbb{R}.}$$

1.7) a) $\begin{cases} z^2 + w i = i \\ w + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z^2 + (1-z)i - i = 0 \\ w = 1 - z \end{cases}$

Ora $z^2 - zi + \cancel{i} - \cancel{i} = 0 \iff z(z-i) = 0 \iff z=0$ o $z=i$.

Abbiamo quindi $(z_1, w_1) = (0,1)$ e $(z_2, w_2) = (i, 1-i)$. $\square$

b) $\begin{cases} z\overline{w} = 2i \\ z^4 = 2i\, w^2 \end{cases} \iff \overline{z} w = -2i \iff w = \dfrac{-2i}{\overline{z}}$

$z \neq 0$ (z=0 non è soluzione)

$$z^4 = 2i\left(-\frac{2i}{\overline{z}}\right)^2 = \frac{-8i}{\overline{z}^2} \iff z^4 \overline{z}^2 = -8i$$

$$z^2 |z|^4 = -8i$$

$$|z|^6 = 8$$

$$|z| = \sqrt{2}$$

$$z^2 \cdot 4 = -8i$$

$$z^2 = -2i$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = 1 - i$$

$$z_2 = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = -1 + i$$

Segue, per $z_1 = 1-i$ $\quad w_1 = \dfrac{-2i}{1+i} \cdot \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{-2-2i}{2} = -1-i$

per $z_2 = -1+i$ $\quad w_2 = \dfrac{-2i}{-1-i} \cdot \dfrac{-1+i}{-1+i} = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$.

Quindi le coppie ricercate sono $\underline{(z,w) = (1-i, -1-i)}$

$\underline{(z,w) = (-1+i, 1+i)}$.

1.8) Sia $\mathcal{P}(n) =$ " $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$ ", per $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

base induttiva o passo base: Oss. che $\mathcal{P}(1)$ ✓ $\quad \left(\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \; ✓ \right)$

passo induttivo: Supposto vero $\mathcal{P}(n)$ (per un qualsiasi $n \geq 1$), dobb. verificare che $\mathcal{P}(n+1)$ che vero. Abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4(n+1)^2-1} \underset{\text{ipotesi induttiva}}{=} \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{\cancel{(2n+1)}(n+1)}{\cancel{(2n+1)}(2n+3)}$$ e quindi $\mathcal{P}(n+1)$ è vero.

Per il principio di induzione possiamo concludere che $\mathcal{P}(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.