Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica, Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni e
Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa
a.a. 2017-18 - PIAZZA 5 - "... varie ed eventuali su $\mathbb{C}$, induzione, ... e poi funzioni elementari..."

1.1) a) $(-z+2)^3=-i$: poniamo $w=-z+2$; risolviamo $w^3=-i$
$= \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Scriviamo le radici cubiche di $-i$ come w_0, w_1, w_2;

allora $w_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

$w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

$w_2 = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

Ne segue che $\underline{\underline{z_0}} = -w_0+2 = \underline{\underline{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right)+\frac{1}{2}i}}$,

$\underline{\underline{z_1}} = -w_1+2 = \underline{\underline{2-i}}$;

$\underline{\underline{z_2}} = -w_2+2 = \underline{\underline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+2\right)+\frac{1}{2}i}}$ sono le soluz. ricercate

$\square$

b) $z|z|+4i=0$: Abbiamo $|z|^2=4$ e quindi $|z|=2$. Ne segue che

$2z=-4i$ ossia $\underline{\underline{z=-2i}}$. $\square$

c) $4z^2-2(1+i)z+i=0$ $\quad z_{1/2} = \dfrac{2(1+i)\pm\sqrt{4(1+i)^2-16i}}{8} = \dfrac{2(1+i)\pm\sqrt{\cancel{4}+8i-\cancel{4}-16i}}{8}$

$= \dfrac{2(1+i)\pm 2\sqrt{-2i}}{8} = \dfrac{1+i\pm\sqrt{-2i}}{4}$

Osserviamo che una radice quadrata di $-i$ è $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Quindi $z_{1/2} = \dfrac{1+i\pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{4} = \dfrac{1+i\pm(1-i)}{4}$.

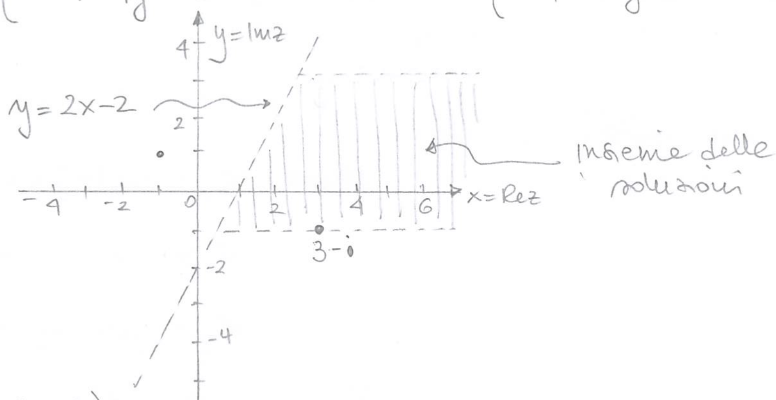
Si ha $\underline{\underline{z_1=\frac{1}{2}\ ,\ z_2=\frac{i}{2}}}$. $\blacksquare$

1.2) a) $\begin{cases} |z-3+i|<|z+1-i| \\ |\mathrm{Im}(z-i)|<2 \end{cases} \iff \begin{cases} |z-3+i|^2<|z+1-i|^2 \\ -2<\mathrm{Im}(z-i)<2 \end{cases}$

Poniamo $z=x+iy$. Allora si ha $\begin{cases} (x-3)^2+(y+1)^2<(x+1)^2+(y-1)^2 \\ -2<y-1<2 \end{cases}$

Abbiamo
$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+1)^2<(x+1)^2+(y-1)^2\\ -1<y<3\end{cases}\iff\begin{cases}\cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}+2y+1<\cancel{x^2}+2x+1+\cancel{y^2}-2y+1\\ -1<y<3\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}4y<8x-8\\ -1<y<3\end{cases}\iff\begin{cases}y<2x-2\\ -1<y<3\end{cases}$$

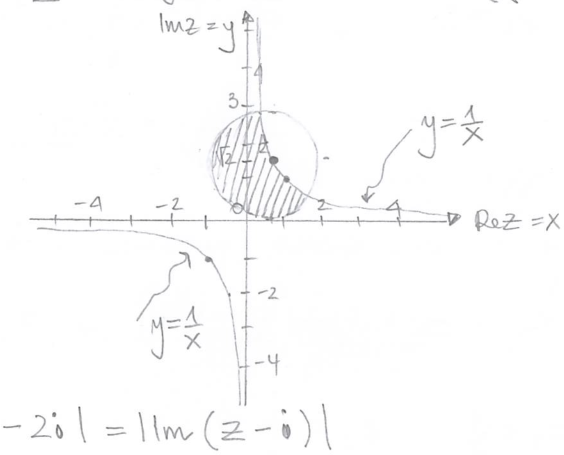


$\square$

b) $\begin{cases}\mathrm{Re}\left(i z^2-i\bar{z}^2\right)\geq -4\\ \left|z-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\sqrt{2}\right|\leq\sqrt{2}\end{cases}$ Poniamo $z=x+iy$ e il sistema risulta equivalente a

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\left(i\left(x^2+2xyi-y^2\right)-i\left(x^2-2xyi-y^2\right)\right)\geq -4\\ \left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2\leq 2\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}-2xy-2xy\geq -4\\ \left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2\leq 2\end{cases}\iff\begin{cases}xy\leq 1\\ \left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2\leq 2\end{cases}$$



//// insieme delle soluzioni.

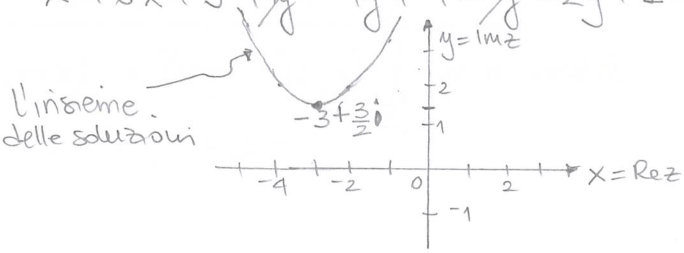
$\square$

c) $|z+3-2i|=|\mathrm{Im}(z-i)|$

$\Rightarrow |z+3-2i|^2=|\mathrm{Im}(z-i)|^2$; poniamo $z=x+iy$ e l'eq. risulta equivalente a $(x+3)^2+(y-2)^2=(y-1)^2$. Si ha

$x^2+6x+9+\cancel{y^2}-4y+4=\cancel{y^2}-2y+1 \iff 2y=x^2+6x+12$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}(x+3)^2+\frac{3}{2}$



$z=x+\left[\frac{1}{2}(x+3)^2+\frac{3}{2}\right]i$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\blacksquare$

1.3) $\begin{cases} z-w=2-i \\ |w|^2-\bar{z}w=i \end{cases} \iff \begin{cases} z=w+2-i \\ |w|^2-\bar{z}w=i \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{z}=\bar{w}+2+i \\ |w|^2-(\bar{w}+2+i)w=i \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \bar{z}=\bar{w}+2+i \\ \cancel{|w|^2}-\cancel{|w|^2}-2w-wi=i \end{cases} \iff w(-2-i)=i \iff w=\frac{i}{-2-i}$

$\iff \begin{cases} z=w+2-i \\ w=\frac{i}{-2-i}\cdot\frac{-2+i}{-2+i}=\frac{-2i-1}{5}=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i \end{cases}$

$\Rightarrow z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i+2-i=\frac{9}{5}-\frac{7}{5}i.$

La soluzione è quindi la coppia $(z,w)=\left(\frac{9}{5}-\frac{7}{5}i, -\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)$. ■

1.4) Sia $\mathcal{P}(n)=$ "$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$" per $n\in\mathbb{N}$.

i) Oss. che $\mathcal{P}(2)=$ "$\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$" ✓

ii) Vogliamo provare che $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, $\mathcal{P}(n)\Rightarrow\mathcal{P}(n+1)$.

Abbiamo $\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{\substack{\text{ipotesi induttiva} \\ \mathcal{P}(n)\text{ vero}}}{=} \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{\cancel{n}}\frac{\cancel{n}}{n+1}=$

$=\frac{1}{n+1}.$

Poiché è verificato i) e ii), dal principio di induzione segue che $\mathcal{P}(n)$ è vero $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. ■

1.5) i) Proviamo l'uguaglianza per $n=1,2,3$:

$n=1$: $(a-b)\overset{?}{=}(a-b)$ ✓ $n=2$ $a^2-b^2\overset{?}{=}(a-b)\sum_{k=0}^{1}a^{2-k-1}b^k$

$\overset{?}{=}(a-b)(a+b)$ ✓

$n=3$ $(a^3-b^3)\overset{?}{=}(a-b)\sum_{k=0}^{2}a^{3-k-1}b^k$

$\overset{?}{=}(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ✓ □

ii) Poniamo $\mathcal{P}(n)=$ "$a^n-b^n=\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-k-1}b^k$".

- Abbiamo provato $\mathcal{P}(1)$ vero.
- Dobbiamo provare che $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 1$, $\mathcal{P}(n)\Rightarrow\mathcal{P}(n+1)$.

Abbiamo $a^{n+1} - b^{n+1} = a^n \cdot a - b^n \cdot b = a^n a - b^n a + b^n a - b^n b$

$$= (a^n - b^n)a + b^n(a-b)$$

$$\underset{\uparrow \text{ ipotesi induttiva}}{=} a(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b^k + b^n(a-b)$$

$$= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k + b^n(a-b)$$

$$= (a-b)\left[\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k + b^n\right] = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k .$$

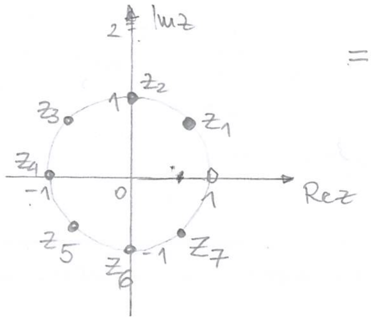
Quindi il passo induttivo è verificato. Dal principio di induzione segue che $\mathcal{P}(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$. $\square$

iii) $z^7 + z^6 + z^5 + \dots + z + 1 = 0 \underset{z \neq 1}{\iff} \dfrac{z^8 - 1}{z - 1} = z^7 + z^6 + \dots + z + 1 = 0$

$\iff z^8 = 1$ con $z_0 \neq 1$

Abbiamo $z_k = \left[\cos\left(\frac{0+2k\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{0+2k\pi}{8}\right) i\right]$ $\quad k = 1, 2, \dots, 7$

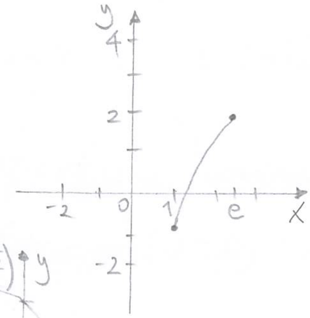
$= \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)$ $\quad k = 1, 2, \dots, 7$



sono le soluzioni dell'eq. data $\blacksquare$

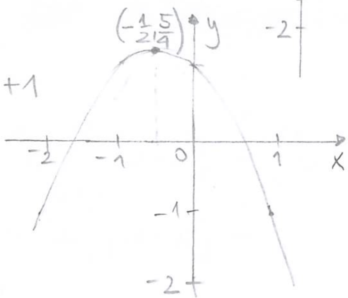
1.6) i) $f(x) = 3\log x - 1$ $\qquad A = [1, e]$

$\underline{\underline{f(A) = [-1, 2].}}$



ii) $f(x) = -x^2 - x + 1 = -(x^2 + x) + 1$

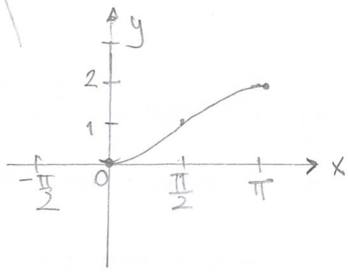
$= -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4}$



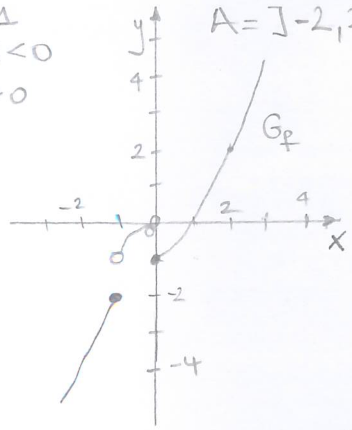
$\underline{\underline{f([-1,1]) = [-1, \tfrac{5}{4}].}}$

iii) $f(x) = -\cos x + 1$ $\qquad A = [0, \pi]$

$\underline{\underline{f([0,\pi]) = [0, 2].}}$



iv) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq -1 \\ -x^2 & \text{se } -1<x<0 \\ 2^x - 2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$



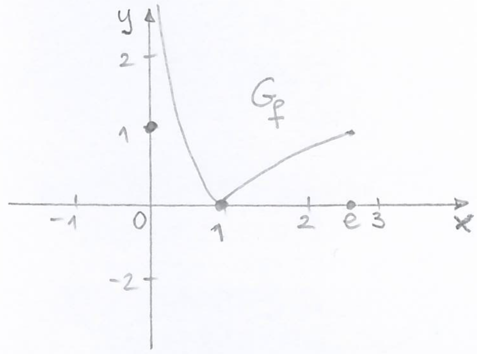
$A =]-2, 2]$.

$f(]-2,2]) =$

$=]-4,-2] \cup [-1,2]$.

17. $f : [0,e] \to \mathbb{R}$,

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ \frac{1}{x} - 1 & \text{se } 0<x \leq 1 \\ \log x & \text{se } 1<x \leq e \end{cases}$



$f([0,e]) = [0,+\infty[$

$f|_{]0,1]}$ strettamente decrescente, $f|_{[1,e]}$ strettamente crescente. ☐

f è limitata inferiormente $(f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,e])$; non è limitata superiormente; quindi f non è limitata. ☐

f non è iniettiva (basta prendere $x_1 = 0$, $x_2 = e$. Allora $x_1 \neq x_2$, mentre $f(x_1) = f(x_2) = 1$) ☐

f non è suriettiva poiché $f([0,e]) = [0,+\infty[\subsetneq \mathbb{R}$.