

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica, Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni e
 Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 a.a. 2017-18 - PIAZZA 1 - "Ingegneria - Esercizio Inf/sup."

1.1) i) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Dite se le seg. prop. sono sempre vere:

a) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \leq y$ No. È vero solo se A è limitato sup.

b) $\forall x \in A, \exists y \in A : x < y$ No. Se A ammette massimo, allora la prop. è falsa; infatti è vera la sua negazione.

c) $\exists y, z \in \mathbb{R} : \forall x \in A, y < x < z$ No. È vero solo se A è limitato.

ii) non $[\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in A, x \leq y] = \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in A : x > y$.

non $[\forall x \in A, \exists y \in A : x < y] = \exists x \in A : \forall y \in A, x \geq y$.

non $[\exists y, z \in \mathbb{R} : \forall x \in A, y < x < z] = \forall y, z \in \mathbb{R}, \exists x \in A : \text{non } [y < x < z]$
 $= \forall y, z \in \mathbb{R}, \exists x \in A : y \geq x \text{ o } x \geq z.$ ■

1.2) $E, F \neq \emptyset, F \subset E \subset \mathbb{R}$. Allora, necessariamente

a) se F è limitato inferiormente, lo è anche E ? No!

esempio: $F = [0, 1] \subset E =]-\infty, 1]$.

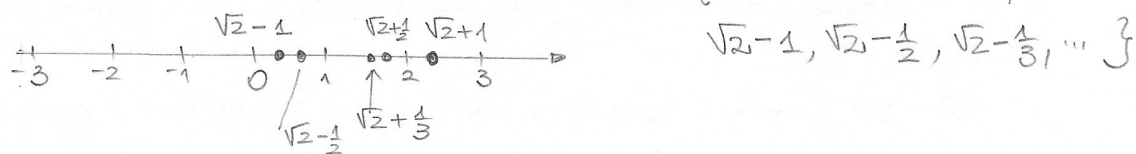
b) se esiste $\min F$, allora esiste $\min E$? No! vedi a).

c) se E è limitato superiormente, allora esiste $(\sup F) \in \mathbb{R}$? Sì!

Se E è limitato superiormente e $F \subset E$, allora lo è anche F , poiché $F \neq \emptyset$ si ha che $(\sup F) \in \mathbb{R}$.

d) $E \times F \subseteq EXE$? Sì, poiché $F \subset E$. ■

1.3) $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt{2} - \frac{1}{k}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \{\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + \frac{1}{2}, \sqrt{2} + \frac{1}{3}, \dots$



a) A ammette minimo Sì $\min A = \sqrt{2} - 1.$

b) $\sup A = \sqrt{2} + 1$, ma non è massimo. NO! $\sup A = \max A = \sqrt{2} + 1$.

c) $\inf A = \sqrt{2}$ NO! $\inf A = \min A = \sqrt{2} - 1$.

d) A non è limitato NO! $\forall x \in A, \sqrt{2} - 1 \leq x \leq \sqrt{2} + 1$ 

1.4) $A = \{ x_n = 1 + (-1)^n \frac{(n-1)}{3n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \}$

$$x_n = \begin{cases} 1 + \frac{n-1}{3n} & n \text{ pari} \\ 1 - \frac{n-1}{3n} & n \text{ dispari} \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{3} - \frac{1}{3n} & n \text{ pari} \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

a) si ha $\frac{2}{3} \leq x_n \leq \frac{4}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e quindi A è limitato.

b) Proviamo che $\inf A = \frac{2}{3}$. Abbiamo

i) $\forall x_n \in A, \frac{2}{3} \leq x_n$

ii) Dobbiamo verificare che $\forall \varepsilon > 0 \exists x_n \in A : x_n < \frac{2}{3} + \varepsilon$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora $\frac{2}{3} + \frac{1}{3n} < \frac{2}{3} + \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{3n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 3\varepsilon$.

Un tale $n \in \mathbb{N}$ esiste per la proprietà archimedea, e possiamo anche supporre che esso sia dispari (altrimenti basta prendere $n+1$ e la disuguaglianza è ancora vera).

Proviamo che $\sup A = \frac{4}{3}$. Abbiamo

i) $\forall x_n \in A, x_n \leq \frac{4}{3}$.

ii) Dobbiamo verificare che $\forall \varepsilon > 0 \exists x_n \in A : \frac{4}{3} - \varepsilon < x_n$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora $\frac{4}{3} - \varepsilon < \frac{4}{3} - \frac{1}{3n} \Leftrightarrow -\varepsilon < -\frac{1}{3n} \Leftrightarrow 3\varepsilon > \frac{1}{n}$.

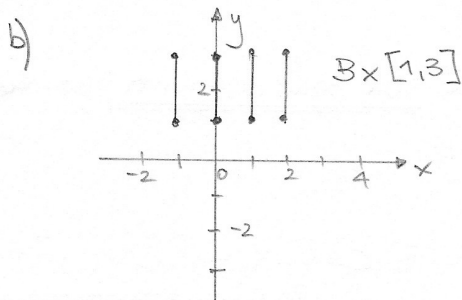
Come sopra, prendendo n pari questa volta, possiamo concludere.

Infine, osserviamo che $\nexists \min A$ e $\nexists \max A$. 

1.5) $B = \{ x \in \mathbb{R} : |(x-2)(x-x^3)| \leq 0 \} = \{ x \in \mathbb{R} : |(x-2)x(1-x^2)| = 0 \} = \{-1, 0, 1, 2\}$.

a) Abbiamo $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{-1, 2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{-1, 0, 1\}, \{-1, 0, 2\}, \{-1, 1, 2\}, \{0, 1, 2\}, B\}$.

Nota $\#\mathcal{P}(B) = 2^4 = 16$. □



c) $\inf B = \min B = -1$.

$\sup B = \max B = 2$.

1.6) a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x|x| + |x^2 - 1| \geq 2x\}$. La diseq. si riduce a

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + x^2 - 1 \geq 2x \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - x^2 + 1 \geq 2x \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ -x^2 + x^2 - 1 \geq 2x \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 1 < 0 \\ -x^2 - x^2 + 1 \geq 2x \end{cases}$$

Abbiamo allora

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 2x \leq 1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x \leq -1 \\ 2x \leq -1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 2x^2 + 2x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \circ \quad x \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \circ \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x \leq -1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} -1 < x < 0 \\ -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq x \leq -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\downarrow \quad S_1 = \left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[\quad S_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad S_3 =]-\infty, -1] \quad S_4 =]-1, 0[$$

Risulta $A = \underline{\underline{]-\infty, \frac{1}{2}] \cup \left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[}}$.

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x^2 - 1} \leq 2\} \quad : \quad \sqrt[3]{x^2 - 1} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 8$$

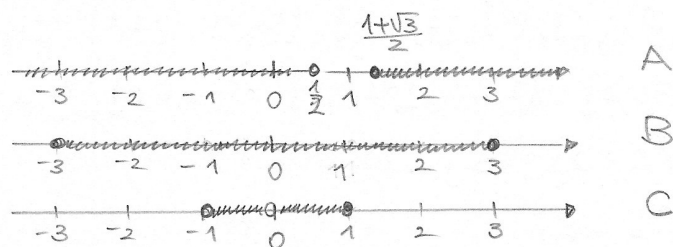
$$\Leftrightarrow x^2 \leq 9$$

$$= \underline{\underline{[-3, 3]}}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[4]{1 - |x|} < 1\} \quad : \quad \sqrt[4]{1 - |x|} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - |x| \geq 0 \\ 1 - |x| < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |x| > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$= \underline{\underline{[-1, 1] \setminus \{0\}}}$$



b) Solo B è un intervallo, A e B non sono disgiunti, poiché $A \cap B = [-3, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{3}}{2}, 3] \neq \emptyset$. $\square$

c) $B \cup C = \underline{B}$; $B \cap C = \underline{C}$, $B \setminus C = \underline{[-3, -1] \cup \{0\} \cup]1, 3]}$. $\blacksquare$

$$1.7) D = \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq \frac{|x-4|-1}{|x-3|+1} < \frac{1}{2} \right\}.$$

Oss. che $|x-3|+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $0 \leq \frac{|x-4|-1}{|x-3|+1} < \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |x-4|-1 < \frac{1}{2}(|x-3|+1)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2|x-4|-2 < |x-3|+1$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 2|x-4| < |x-3|+3. \quad \text{Possiamo allora scrivere}$$

$$2 \leq 2|x-4| < |x-3|+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 2(x-4) < (x-3)+3 \\ x-4 \geq 1 \end{cases} \circ \begin{cases} 3 \leq x < 4 \\ -2(x-4) < (x-3)+3 \\ -x+4 \geq 1 \end{cases}$$

$$\circ \begin{cases} x < 3 \\ -2(x-4) < -(x-3)+3 \\ -x+4 \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{ovvero } \begin{cases} x \geq 5 \\ x < 8 \end{cases} \circ \begin{cases} 3 \leq x < 4 \\ 3x > 8 \\ x \leq 3 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 3 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$S_1 = [5, 8[\quad S_2 = \{3\} \quad S_3 =]2, 3[$$

Risulta $D =]2, 3[\cup [5, 8[$. Possiamo allora affermare che NON è un intervallo. Si ha $\underline{\inf D = 2}$, $\underline{\sup D = 8}$. $\blacksquare$