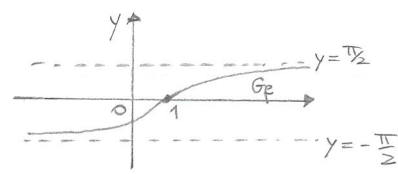


Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'informazione e delle comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'informazione e organizzazione d'impresa
 SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA I
 a.a. 2017-2018 - Trento, 22 dicembre 2017

FILA A

21) $f(x) = \cos(\log(1+x^4))$: $f'(x) = -\sin(\log(1+x^4)) \cdot \frac{4x^3}{1+x^4}$. ☐

22) $f(x) = \arccos\left(\frac{x^5}{32}\right)$: $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{x^5}{32} \leq 1\} = \underline{\underline{[-2, 2]}}$. ☐

23) $f(x) = \arctg(x-1)$:  su $I =]-\infty, 1]$ f risulta ☐
 crescente.

24) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x + \sin x} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$ $\frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x + \sin x} = \frac{1 - 1 + \frac{x}{2} + o(x)}{2x + o(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{4}$ ☐

25) $f(x) = x \log x$ $f'(x) = \log x + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x}$ $P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$
 $f'(1) = 1$ $f''(1) = 1$
 $= 0 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2$
 Quindi $\underline{\underline{P_2(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2}}$.

26) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta+1}{2}\right)^n < +\infty \Leftrightarrow \left|\frac{\beta+1}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow -2 < \beta+1 < 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\beta \in]-3, 1[}}$. ☐

27) $f(x) = x e^{5x}$ $F(x) = \int x e^{5x} dx = x \frac{e^{5x}}{5} - \int \frac{e^{5x}}{5} dx =$
 $= x \frac{e^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25} + C, C \in \mathbb{R}$.

$0 = F(0) = -\frac{1}{25} + C \Rightarrow C = \frac{1}{25}$.

La primitiva richiesta è $\underline{\underline{F(x) = x \frac{e^{5x}}{5} - \frac{e^{5x}}{25} + \frac{1}{25}}}$. ☐

28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sqrt[3]{1+t} dt}{\sin x} = \underline{\underline{1}}$.

Si presenta nella forma indet. $\frac{0}{0}$. Ora $\frac{\left(\int_0^x \sqrt[3]{1+t} dt\right)'}{(\sin x)'} = \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1+x^2} \cdot 2x}{\cos x}$

$\rightarrow 1$. Quindi, per il teorema di de l'Hôpital il limite dato vale 1. ☐

29) area sottografica di $f(x) = \frac{2x}{5+x^2}$ per $x \in [0, 1]$ = $\int_0^1 \frac{2x}{5+x^2} dx = \left[\log(5+x^2)\right]_0^1 =$
 $= \log 6 - \log 5 = \underline{\underline{\log \frac{6}{5}}}$. ☐

30) $5y^4 y' = 2x^2 \Leftrightarrow \int 5y^4 y' dx = \int 2x^2 dx \Leftrightarrow y^5(x) = \frac{2x^3}{3} + C \Rightarrow$
 $\underline{\underline{y(x) = \sqrt[5]{\frac{2}{3}x^3 + C}}}$, $C \in \mathbb{R}$. ☐

b1) i) $f(x) = \left| \frac{x^2}{2} - x \right| e^{x+1}$. Osserviamo che $f(x) = |g(x)|$, dove
 $g(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) e^{x+1}$. Studiamo prima $g(x)$ e poi $|g(x)|$.

$$g(x) = \left(\frac{x^2 - 2x}{2} \right) e^{x+1} \quad \bullet \quad \text{dom } g = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[.$$

• nessuna simmetria evidente

• segno $\frac{+}{-} \frac{-}{+} \frac{+}{+} \frac{+}{+} \frac{+}{+}$ $\left(\frac{x^2 - 2x}{2} \right)$ $\left(e^{x+1} > 0 \right)$
 segno di g

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizz., per g ,
 per $x \rightarrow -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Non c'è asintoto obliquo!

• $\text{dom } g' = \mathbb{R}$ $g'(x) = (x-1)e^{x+1} + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) e^{x+1}$
 $= e^{x+1} \left(\frac{2x - 2 + x^2 - 2x}{2} \right) = e^{x+1} \left(\frac{x^2 - 2}{2} \right)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2} \text{ sono i pt. critici di } g$$

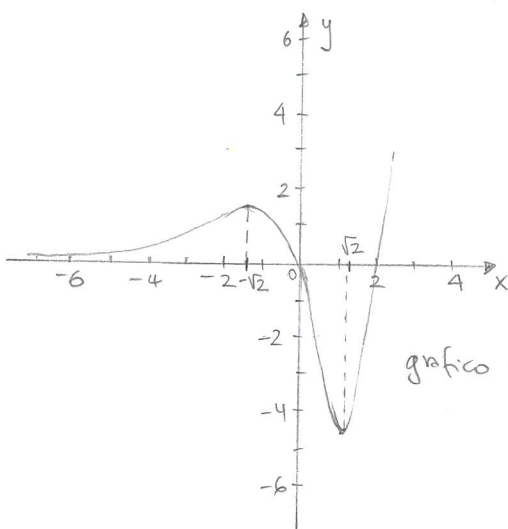
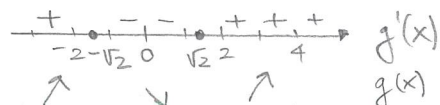


grafico qualitativo di g



$$x = -\sqrt{2} \text{ pt. di max. loc. stretto per } g \quad g(-\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}+1}$$

$$x = \sqrt{2} \text{ pt. di min. loc. stretto per } g \quad g(\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}+1}$$

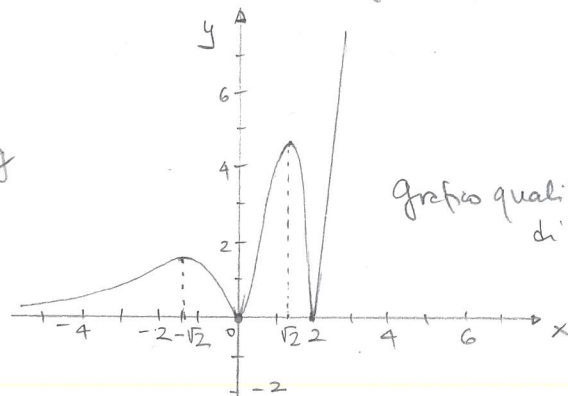


grafico qualitativo di f

$x=0$, $x=2$ sono
 due pt. di non derivabilità per f ; sono due
 punti angolosi.

ii) $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$: Oss. che $f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) e^{x+1}$ per $x \leq 0$. Inoltre

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x^2}{2} - x \right) e^{x+1} &= \left(\frac{x^2}{2} - x \right) e^{x+1} - \int (x-1) e^{x+1} dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - x \right) e^{x+1} - (x-1) e^{x+1} + \int e^{x+1} dx = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - x - x + 1 + 1 \right) e^{x+1} + c. \end{aligned}$$

□

ossia $\int \left(\frac{x^2}{2} - x\right) e^{x+1} dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2\right) e^{x+1} + c.$

Dunque

$$\int_{-\infty}^0 f(x) dx = \lim_{K \rightarrow -\infty} \left[\int_K^0 f(x) dx \right] = \lim_{K \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2\right) e^{x+1} \right]_K^0$$

$$= \lim_{K \rightarrow -\infty} \left[2e - \left(\frac{K^2}{2} - 2K + 2\right) e^{K+1} \right] = \underline{2e}.$$

b2) i) Dobbiamo determinare $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$. Ora

$$\frac{2 \log(1+x) - 2 \sin x + \alpha x^2}{x^2} = \frac{2 \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - 2 \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \alpha x^2}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) + \frac{1}{3}x^3 + \alpha x^2}{x^2} = \frac{(\alpha - 1)x^2 + x^3 + o(x^3)}{x^2} \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{\alpha = 1}.$

ii) Sia $\alpha = 1$. Allora $f(x) = \frac{2 \log(1+x) - 2 \sin x + x^2}{x^2}$ per $x \neq 0, x > -1$.

f è derivabile in $x=0 \Leftrightarrow \exists$ finito $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

Ora $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{2 \log(1+x) - 2 \sin x + x^2}{x^3} = \frac{x^3 + o(x^3)}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$

Risultato che f è derivabile in $x=0$ e $\underline{f'(0) = 1}.$

iii) $\frac{\sin x}{f(x)} = \frac{x^2(x + o(x))}{(\alpha - 1)x^2 + x^3 + o(x^3)} = \frac{x^3 + o(x^3)}{(\alpha - 1)x^2 + x^3 + o(x^3)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \begin{cases} 1 \text{ se } \alpha = 1 \\ 0 \text{ se } \alpha \neq 1. \end{cases}$

b3) i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1 - \cos \frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n^{2\alpha}}}}_{a_n}$

$a_n > 0 \quad \forall n$. Notiamo che

$$a_n \sim \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \frac{1}{n^{2-2\alpha}} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2-2\alpha}} < +\infty \Leftrightarrow 2-2\alpha > 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{1}{2}$, per il criterio del confronto asintotico segue che la serie data risulta convergente se e solo se $\underline{0 < \alpha < \frac{1}{2}}$.

ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n+2}{3n^2+4}\right) (x-3)^n$: abbiamo una serie di potenze di centro $x_0 = 3$.

Posto $a_n = \frac{n+2}{3n^2+4}$ si ha subito che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$,

e il raggio di convergenza della serie data è $r = 1$.

Segue subito che la serie data converge assolutamente (e quindi anche semplicemente) per $x \in]2, 4[$.

Per $x=2$, la serie si riduce a $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3n^2+4}$ che converge grazie al criterio di Leibniz.

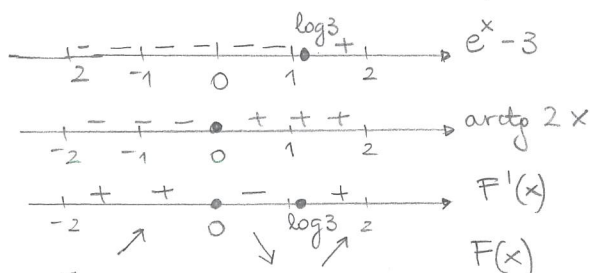
Per $x=4$, la serie si riduce a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{3n^2+4}$ che diverge positivamente poiché $\frac{n+2}{3n^2+4} \sim \frac{1}{3n}$ per $n \rightarrow +\infty$ e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = +\infty$.

In definitiva, l'insieme di convergenza della serie data è $E = [2, 4[$. $\blacksquare$

b) $F(x) = \int_0^x (e^t - 3) \arctan 2t \, dt$

i) $F'(x) = \underset{\text{TFC}}{(e^x - 3) \arctan 2x}$; risulta $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = \log 3}, \underline{x = 0}$.

Quindi i pt. critici di F in $[-2, 2]$ sono $x=0$ e $x=\log 3$.



Quindi $F(x)$ è crescente su $[-2, 0]$ e su $[\log 3, 2]$, mentre è decrescente su $[0, \log 3]$. $\square$

ii) Possiamo procedere in 2 modi: a) individuare $\alpha > 0$ tale che

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^\alpha} \neq \text{finito}$; si presenta nella forma $\frac{0}{0}$; oss. che

$$\begin{aligned} \frac{F'(x)}{d x^{\alpha-1}} &= \frac{(e^x - 3) \arctan 2x}{d x^{\alpha-1}} = \frac{(-2 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) (2x + o(x))}{d x^{\alpha-1}} \\ &= \frac{-4x + o(x)}{d x^{\alpha-1}}, \text{ per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^\alpha} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{d x^{\alpha-1}} \neq 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 1$ ossia $\alpha = 2$ e il limite vale -2 .

Quindi, l'ordine di infinitesimo è $\alpha = 2$ e p.p. $-2x^2$.

b) Abbiamo $F'(x) = \underbrace{(e^x - 3) \arctan 2x}_{F'(0)=0}$, $F''(x) = \underbrace{e^x \arctan 2x + (e^x - 3) \frac{2}{1 + (2x)^2}}_{F''(0)=-4}$.

Allora $F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = 0 + 0 \cdot x + \frac{-4}{2}x^2 + o(x^2)$
 $= -2x^2 + o(x^2)$, per $x \rightarrow 0$.

Quindi si ottiene (di nuovo) che l'ordine di infinitesimo è $d=2$ e la p.p. $-2x^2$. ■

b5) $\int_2^{+\infty} \underbrace{\frac{\arctan(x-2)}{x^{2\beta}(x-2)^\beta}}_{f(x)} dx$ $f:]2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua, > 0 .

Oss. che

per $x \rightarrow 2^+$ $f(x) \sim \frac{x-2}{2^{2\beta}(x-2)^\beta} = \frac{1}{4^\beta(x-2)^{\beta-1}}$

per $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{2\beta} x^\beta} = \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{3\beta}}$.

Perché $\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^{\beta-1}} dx < +\infty \Leftrightarrow \beta-1 < 1$, e
 $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{3\beta}} dx < +\infty \Leftrightarrow 3\beta > 1$,

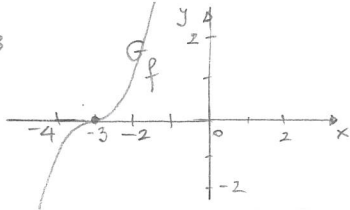
per il criterio del confronto asintotico possiamo afferire che l'integrale improprio dato risulta convergente $\Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{1}{3} < \beta < 2}}$. ■

b6) i) f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow \exists$ finito $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, oppure
 analogamente, $\exists$ finito $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. □

ii) Enunciato e dim. della derivata del prodotto di due funzioni. ■

FILA (B) a1) $f(x) = -\sin(\log(x^2+1))$: $f'(x) = -\cos(\log(x^2+1)) \cdot \frac{2x}{x^2+1}$ ☐

a2) $f(x) = \arcsin\left(\frac{x^3}{27}\right)$: $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{x^3}{27} \leq 1\} = \underline{\underline{[-3, 3]}}$ ☐

a3) $f(x) = (x+3)^3$  $m \ I = \underline{\underline{[-3, +\infty[}}$ f $\nearrow$ $\text{monotona crescente}$ ☐

a4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{\lg x + x} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$ $\frac{\cos \sqrt{x} - 1}{\lg x + x} = \frac{1 - \frac{x}{2} + o(x) - 1}{2x + o(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{4}$ ☐

a5) $f(x) = (1+x)e^x$ $f'(x) = e^x + (1+x)e^x$ $f''(x) = e^x + e^x + (1+x)e^x$
 $f'(1) = 3e$ $f''(1) = 4e$

Da $P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(x) = 2e + 3e(x-1) + 2e(x-1)^2}}$ ☐

a6) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha-1}{3}\right)^n < +\infty \Leftrightarrow \left|\frac{\alpha-1}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow -3 < \alpha-1 < 3 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \in]-2, 4[}}$ ☐

a7) $f(x) = xe^{7x}$ $F(x) = \int xe^{7x} dx = xe^{\frac{7x}{7}} - \int \frac{e^{7x}}{7} dx =$
 $= \frac{xe^{7x}}{7} - \frac{e^{7x}}{49} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

$0 = F(0) = -\frac{1}{49} + c \Rightarrow c = \frac{1}{49}.$

La primitiva richiesta è $\underline{\underline{F(x) = \frac{xe^{7x}}{7} - \frac{e^{7x}}{49} + \frac{1}{49}}}$ ☐

a8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{1+t} dt}{x \cos x} = \underline{\underline{-1}}.$

Si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Ora $\frac{\left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+t} dt\right)'}{(x \cos x)'} = \frac{\sqrt{1+x^2} \cdot 2x - \sqrt{1+x}}{\cos x - x \sin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$. Quindi, per il teorema di de l'Hôpital il limite dato vale -1 . ☐

a9) area sottografica di $f(x) = \frac{3x^2}{7+x^3}$ per $x \in [0, 1] = \int_0^1 \frac{3x^2}{7+x^3} dx$
 $= \left[\log(7+x^3) \right]_0^1 = \log 8 - \log 7 = \underline{\underline{\log \frac{8}{7}}}$ ☐

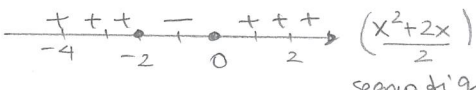
a10) $3y^2 y' = 2x+1 \Leftrightarrow \int 3y^2 y' dx = \int (2x+1) dx \Leftrightarrow y^3(x) = x^2+x+c$
 $\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = \sqrt[3]{x^2+x+c}}}, \quad c \in \mathbb{R}.$ ☒

b1) i) $f(x) = \left| \frac{x^2}{2} + x \right| e^{1-x}$. Osserviamo che $f(x) = |g(x)|$, dove

$g(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) e^{1-x}$. Studiamo prima $g(x)$ e poi $|g(x)|$.

$g(x) = \left(\frac{x^2 + 2x}{2} \right) e^{1-x}$ • dom $g = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• nessuna simmetria evidente

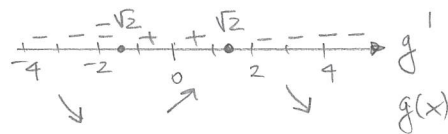
• segno  $e^{1-x} > 0 \quad \forall x$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ Non c'è asintoto obliquo!

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. $y=0$ asintoto orizzontale per g , per $x \rightarrow +\infty$.

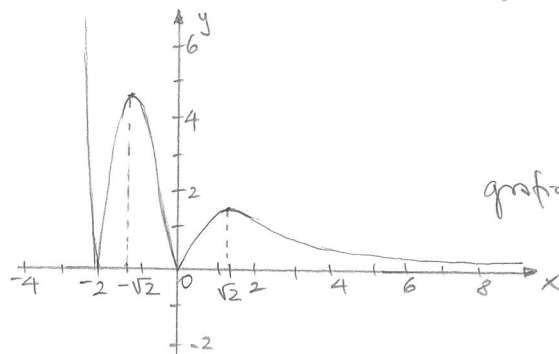
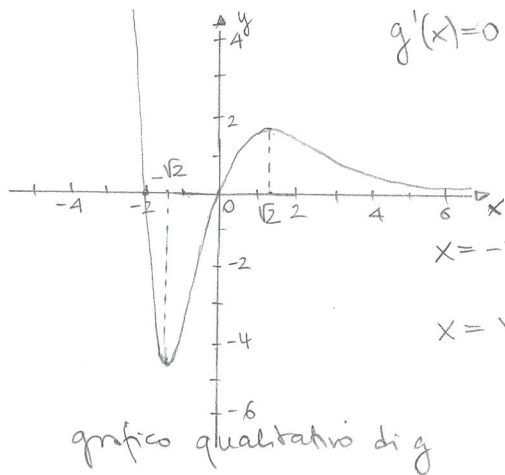
• dom $g' = \mathbb{R}$ $g'(x) = (x+1)e^{1-x} + \left(\frac{x^2+2x}{2} \right) e^{1-x}(-1)$
 $= e^{1-x} \left(\frac{2x+2-x^2-2x}{2} \right) = e^{1-x} \left(\frac{-x^2+2}{2} \right)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ sono i pt. critici di g



$x = -\sqrt{2}$ pt. di min. loc. stretto per g $g(-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}+1}$

$x = \sqrt{2}$ pt. di max. loc. stretto per g $g(\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}+1}$



$x = -2$, $x = 0$ sono due pt. di non derivabilità per f ; sono due pt. angolosi. □

ii) $\int_0^{+\infty} f(x) dx$: oss. che $f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) e^{1-x}$ per $x \geq 0$. Inoltre

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{x^2}{2} + x \right) e^{1-x} dx &= -\left(\frac{x^2}{2} + x \right) e^{1-x} + \int (x+1) e^{1-x} dx = \\ &= -\left(\frac{x^2}{2} + x \right) e^{1-x} - (x+1) e^{1-x} + \int e^{1-x} dx = \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} - x - x - 1 - 1 \right) e^{1-x} + c \end{aligned}$$

ossia $\int \left(\frac{x^2}{2} + x\right) e^{1-x} dx = \left(-\frac{x^2}{2} - 2x - 2\right) e^{1-x} + c.$

Dunque $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\int_0^M f(x) dx \right] = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\left(-\frac{x^2}{2} - 2x - 2\right) e^{1-x} \right]_0^M$
 $= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\left(-\frac{M^2}{2} - 2M - 2\right) e^{1-M} - (-2)e \right] = \underline{2e}.$ ■

b2) i) Dobbiamo determinare $\beta \in \mathbb{R}$: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$. Ora

$$\frac{e^{2x} - 2\sin x - \beta x^2 - 1}{x^2} = \frac{\cancel{1} + \cancel{2x} + \frac{2x^2}{2} + \frac{8x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{2x} + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + o(x^3) - \beta x^2 - \cancel{1}}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3) - \beta x^2}{x^2} = \frac{(2-\beta)x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)}{x^2} \text{ per } x \rightarrow 0$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \iff \underline{\beta = 2}.$ □

ii) Sia $\beta = 2$. Allora $f(x) = \frac{e^{2x} - 2\sin x - 2x^2 - 1}{x^2}$ per $x \neq 0$.

f è derivabile in $x=0 \iff \exists$ finito $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$

Ora $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{e^{2x} - 2\sin x - 2x^2 - 1}{x^3} = \frac{\frac{5}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{5}{3}.$

Risulta che f è derivabile in $x=0$ e $\underline{f'(0) = \frac{5}{3}}.$ □

iii) $\frac{\sin x}{f(x)} = \frac{x^2(x + o(x))}{(2-\beta)x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)} = \frac{x^3 + o(x^3)}{(2-\beta)x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)} \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{5} & \text{se } \beta = 2 \\ 0 & \text{se } \beta \neq 2 \end{cases}$ ■

b3) i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n^{2\alpha}}}{\log(1 + \frac{1}{n})}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{a_n}$

$a_n > 0 \ \forall n$. Notiamo che

$$a_n \sim \frac{\frac{1}{n^{2\alpha}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{2\alpha-1}} \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha-1}} < +\infty \iff 2\alpha-1 > 1 \iff \alpha > 1$, per il

criterio del confronto asintotico segue che la serie data risulta convergente se e solo se $\underline{\alpha > 1}.$ □

ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3n+2}{n^3+1}\right) (x-2)^n$: abbiamo una serie di potenze di centro $x_0=2$.

Posto $a_n = \frac{3n+2}{n^3+1}$ si ha subito che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$

e il raggio di convergenza della serie data è $r=1$.

Segue subito che la serie data converge assolutamente (e quindi anche semplicemente) per $x \in]1, 3[$.

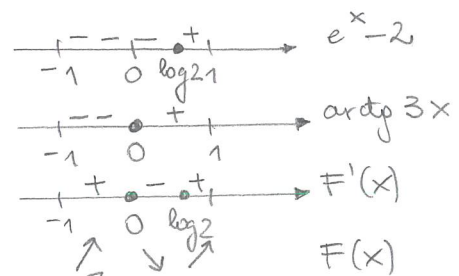
Oss. che per $x=1$, la serie si riduce a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n+2}{n^3+1} (-1)^n$, che converge assolut. poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n+2}{n^3+1} < +\infty$ essendo $\frac{3n+2}{n^3+1} \sim \frac{3}{n^2}$ per $n \rightarrow +\infty$ e la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ (si usa il criterio del confronto asintotico).

Per $x=3$ la serie si riduce a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n+2}{n^3+1} < +\infty$.

In definitiva, l'insieme di convergenza della serie data è $E = [1, 3]$. ■

b4) $F(x) = \int_0^x (e^t - 2) \operatorname{arctg} 3t \, dt$.

ii) $F'(x) = (e^x - 2) \operatorname{arctg} 3x$; risulta $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = \log 2}, \underline{x = 0}$.
Quindi i pt. critici di F su $[-1, 1]$ sono $x = 0, x = \log 2$.



Quindi $F(x)$ è crescente su $[-1, 0]$ e su $[\log 2, 1]$, mentre è decrescente su $[0, \log 2]$. □

ii) (vedi anche Es. b4, Fila A). Abbiamo $F(0) = 0$

Abbiamo $F'(x) = (e^x - 2) \operatorname{arctg} 3x$ $F''(x) = e^x \operatorname{arctg} 3x + (e^x - 2) \frac{3}{1+(3x)^2}$.
Note: $F'(0) = 0$ and $F''(0) = -3$ are indicated above the terms.

Allora $F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + o(x^2) = 0 + 0 \cdot x - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$
 $= -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$, per $x \rightarrow 0$.

Quindi si ottiene che l'ordine di infinitesimo è $\alpha = 2$ e la p.p. $-\frac{3}{2}x^2$. ■

b5) $\int_3^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x-3)}{x^{3\alpha} (x-3)^\alpha} dx$ $f:]3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continua, > 0 .
Oss. che

per $x \rightarrow 3^+$ $f(x) \sim \frac{x-3}{3^{3\alpha} (x-3)^\alpha} = \frac{1}{27^\alpha (x-3)^{\alpha-1}}$

$$\text{per } x \rightarrow +\infty \quad f(x) \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{3\alpha} x^\alpha} = \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{4\alpha}}.$$

$$\text{Poiché } \int_3^4 \frac{1}{(x-3)^{\alpha-1}} dx < +\infty \iff \alpha-1 < 1, \text{ e}$$

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^{4\alpha}} dx < +\infty \iff 4\alpha > 1,$$

per il criterio del confronto asintotico possiamo afferire che l'integrale improprio dato risulta convergente $\iff \underline{\underline{\frac{1}{4} < \alpha < 2}}$. ■

b6)i) $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. F è la primitiva di f in $[a,b]$

Se F è derivabile in $[a,b]$ e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$. □

ii) Enunciato e dim. della formula del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica. ■