Univ. di Trento – Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione – CdL in Informatica...
a.a. 2017–2018 – PIAZZA 9 – "continuità, derivabilità e teoremi fondamentali"

1) $\boxed{f(x) = \dfrac{-2x^2+\sin|x|}{|x+1|}}$

- $\text{dom } f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2x^2+\sin|x|}{(-x-1)x} = 2$, $\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-2x\right] = -2$

  $\underline{y=2x-2}$ asintoto obliquo per f per $x\to-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^2+\sin|x|}{(x+1)x} = -2$, $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+2x\right] = 2$

  $\underline{y=-2x+2}$ asintoto obliquo per f per $x\to+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\overbrace{-2x^2+\sin|x|}^{-2+\sin 1}}{\underbrace{|x+1|}_{\text{infinitesimo positivo}}} = -\infty$

  $\underline{x=-1}$ asintoto verticale per f □

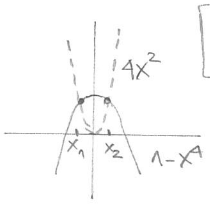
$\boxed{f(x) = e^{-x} + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$: $\text{dom } f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\nexists$ asintoto obliquo per f, per $x\to-\infty$ poiché $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\underline{y=0}$ asintoto orizzontale per f, per $x\to+\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1-\dfrac{\pi}{2}$ $\quad \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1+\dfrac{\pi}{2}$;

  $\underline{x=0}$ non è un asintoto verticale per f. ■

[teorema dei valori intermedi]

2) $\boxed{e^{-x} - \operatorname{arctg} x = -1}$: Abbiamo che $f(x) = e^{-x} - \operatorname{arctg} x$ è continua in $\mathbb{R}$; inoltre, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$; inoltre $f(x)$ è strett. crescente essendo somma di 2 funz. strett. decrescenti; abbiamo $\text{im } f = \left]-\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$. Quindi $\exists!$ soluzione dell'eq. $f(x) = -1$. □



$\boxed{1-x^4 = 4x^2}$: Quest'eq. è equivalente all'eq. $x^4+4x^2-1=0$ che si scrive anche $(x^2+2)^2-5=0$, ossia $(x^2+2)^2 = 5$, ossia $x^2 = -2\pm\sqrt{5}$. Ne segue che $x_{1/2} = \pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}$ sono le uniche due soluzioni dell'eq. data. □

$\boxed{2x^4+|x| = 1}$: L'eq. data si scrive in forma equivalente $2x^4+|x|-1=0$. Oss. che $f(x) = 2x^4+|x|-1$ è continua e pari. Inoltre, $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)\geq -1$ e $f(x) = -1 \Leftrightarrow x=0$. Infine $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} f(x) = +\infty$; quindi $\text{im } f = [-1,+\infty[$. Quindi sono due soluzioni (essendo f pari, e $f|_{[0,+\infty[}$ $\uparrow$ essendo somma di 2 funz. strett. crescenti) dell'eq. $f(x)=0$, e quindi dell'eq. data. $\square$

$\boxed{x^{33}+x+1=0}$: Sia $f(x)=x^{33}+x+1$; la funz. è continua su $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Inoltre f è strett. crescente; quindi $\underline{\underline{\exists!\ x_0\in\mathbb{R}}}$ t.c. $\underline{\underline{f(x_0)=0}}$. ■

[Teorema di ∃enza degli zeri; metodo di bisezione]

3) Oss. che $2x^4=1-x^3$ ammette una soluzione in $[0,1]$ $\iff$ $f(x)=2x^4+x^3-1$ ammette uno zero su $[0,1]$. f è continua su $[0,1]$ e $f(0)=-1$, $f(1)=2$. Quindi per il teorema di ∃enza degli zeri $\exists$ un $x_0\in\,]0,1[\,:\ f(x_0)=0$. Tale x_0 è unico poiché f è strett. crescente su $[0,1]$ (somma di 2 funz. strett. crescenti, oppure, $f'(x)=8x^3+3x^2>0$ su $]0,1]$).
Determiniamo $[\tilde a,\tilde b]$ mediante il metodo di bisezione. Notiamo che il pt. medio di $[0,1]$ è $c_0=\frac{1}{2}$ e $f\left(\frac{1}{2}\right)=\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{16}_8}+\frac{1}{8}-1=-\frac{3}{4}\,(<0)$.
Quindi $x_0\in\left]\frac{1}{2},1\right[$. Il pt. medio di $\left[\frac{1}{2},1\right]$ è $c_1=\frac{3}{4}$, e $f\left(\frac{3}{4}\right)=\cancel{2}\cdot\frac{81}{\cancel{256}_{128}}+\frac{27}{64}-1$
$=\frac{81}{128}+\frac{27}{64}-1=\frac{81+54}{128}-1=\frac{135}{128}-1>0$. Ora basta porre $\underline{\underline{[\tilde a,\tilde b]=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]}}$ e si ha quanto richiesto. ■

[Teorema dei valori intermedi]

4) Da (*) si ha ottenuto che $f(0)=0$ e $\frac{1}{2}\le f(1)$.
Essendo f continua su $[-1,1]$, f assume in $[-1,1]$ tutti i valori compresi tra 0 e $\frac{1}{2}$, ossia $\left[0,\frac{1}{2}\right]\subseteq f([-1,1])$. Quindi possiamo asserire che $\exists x_0\in[-1,1]:\ f(x_0)=\frac{1}{2}$, ossia $\underline{\text{ii)}}$.
Nota che i), iii) e iv) non sono vere per qualsiasi f soddisfacente (*); infatti $f(x)=\frac{|x|}{2}$ soddisfa (*) ma per essa nessuna delle affermazioni i), iii) e iv) è vera. ■

5) i) $\lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+x^\alpha)}{\sin\sqrt{x}}\ \underline{\underline{=+\infty \text{ se } \alpha\le0}}$; inoltre se $\alpha>0$ si ha

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+x^\alpha)}{\sin\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\underbrace{\frac{\log(1+x^\alpha)}{x^\alpha}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}}_{\to 1}\cdot\frac{x^\alpha}{x^{\frac{1}{2}}}=\begin{cases}1 & \text{se } \alpha=\frac{1}{2}\\ 0 & \text{se } \alpha>\frac{1}{2}\\ +\infty & \text{se } 0<\alpha<\frac{1}{2}\end{cases}$$

Quindi, in definitiva, il limite dato risulta finito $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\underline{\alpha \geq \frac{1}{2}}$. □

[Teorema di Weierstrass]

ii) $f(x) = \begin{cases} e^x + x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{\log(1+x^\alpha)}{\sin\sqrt{x}} & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$ Abbiamo che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1$

Quindi f risulta continua in $x=0 \iff \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, ossia $\underline{\underline{\alpha = \frac{1}{2}}}$. In tutti gli altri punti $x \in [-1,1]\setminus\{0\}$ f è continua essendo composizione, rapporto, somma di funzioni continue; dunque sono verificate tutte le ipotesi del teorema di Weierstrass su $[-1,1]$. ■

6) i) $f(x) = \log x$ su $]0,+\infty[$: $]0,+\infty[$ non è un intervallo chiuso e limitato! □

[Teorema di Weierstrass]

ii) • $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{arctg}^2 x} & \text{se } x \in [-1,1]\setminus\{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ non è continua in $x=0$, poiché $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\operatorname{arctg}^2 x} = +\infty$; □

•• $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\operatorname{arctg} x} & \text{se } x \in [-1,0[\\ x^2 \sin\frac{1}{x} + 1 & \text{se } x \in]0,1] \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ Poiché $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{\operatorname{arctg} x} = 1 = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2 \sin\frac{1}{x} + 1\right) = f(0)$,

si ha che f è continua in $x=0$. In tutti gli altri pt. di $[-1,1]\setminus\{0\}$ f è continua essendo composizione, prodotto, rapporto di funz. continue.

Il teorema di Weierstrass è applicabile! ■

7) $|x|\sin x \sim |x|x$ per $x \to 0$ e si verifica facilmente che f è $\underline{\underline{\text{derivabile in } x=0}}$. Infatti $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{|h|\sin h}{h} = 0 = f'(0)$. □

$|e^x - 1| \sim |x|$ per $x \to 0$ e si verifica facilmente che f $\underline{\text{non}}$ $\underline{\underline{\text{è deriv. in } x=0}}$. Infatti $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{|e^h - 1|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$, mentre

$\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{|e^h - 1|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{-e^h + 1}{h} = -1$. Quindi

$\nexists f'(0)$; $x=0$ è un pt. angoloso per f. □

$|x|\,(\cos x - 1) \sim |x|\,\frac{x^2}{2}$ per $x \to 0$, e quindi risulta (facile verifica!) <u>derivabile in $x=0$</u>. □

$\arcsin\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$ per $x \to 0$; la funzione $\arcsin\sqrt{x}$ ha quindi in $x=0$

<u>Un pt. con tangente verticale</u> ($x=0$ pt. di non-derivabilità). ■

8) $$\left[\arcsin(3x+e^{4x})\right]' = \frac{1}{\sqrt{1-(3x+e^{4x})^2}}\cdot(3+4e^{4x}) = \underline{\frac{3+4e^{4x}}{\sqrt{1-(3x+e^{4x})^2}}}.$$ □

$$(x\,\mathrm{arctg}\,2x)' = \mathrm{arctg}\,2x + x\cdot\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2 = \underline{\mathrm{arctg}\,2x + \frac{2x}{1+4x^2}}.$$ □

$$\left[\log(\arccos(5x-1))\right]' = \frac{1}{\arccos(5x-1)}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-(5x-1)^2}}\cdot 5 = \underline{-\frac{5}{[\arccos(5x-1)]\sqrt{1-(5x-1)^2}}}$$ □

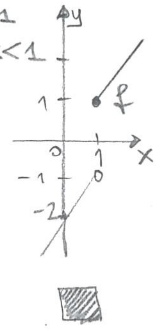
$$\left[(\sin^2 x + \sqrt[4]{x})^2\right]' = \underline{2(\sin^2 x + \sqrt[4]{x})\left(2\sin x\cos x + \tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\right)}.$$ □

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}x\right) = \underline{\frac{x}{2\sqrt{1+\sqrt{x^2+1}}\,\sqrt{x^2+1}}}.$$ ■

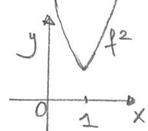
9) a) f deriv. $\Rightarrow |f|$ è deriv. <u>falso</u>: $f(x)=x$

b) f deriv. $\Rightarrow |f|$ è continua. <u>vero</u>: infatti f deriv. $\Rightarrow f$ continua $\Rightarrow |f|$ continua (composiz. di funzioni continue).

(*) c) f^2 è continua, allora f è continua. <u>falso</u>: $f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\geq 1 \\ x-2 & \text{se } x<1 \end{cases}$



$f^2(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\geq 1 \\ (x-2)^2 & \text{se } x<1 \end{cases}$



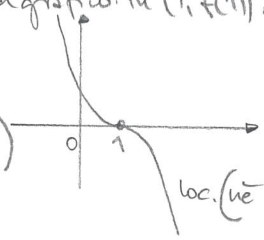
(*) d) $|f|$ è continua, allora f è continua

<u>falso</u>; stesso esempio di c) ■

10) a) $\boxed{V}$ $y=f(1)+f'(1)(x-1) = f(1)$ è eq. retta tg. al grafico in $(1, f(1))$.

b) $\boxed{F}$ basta prendere $f(x)=-(x-1)^3$

$\left(f'(1)=0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\right)$



$x=1$ non è né pt. di max loc. (né pt. di min. loc).

c) $\boxed{F}$ $f(1)=0$ per esempio ⟶ ■

[Derivate:

11) $g(x)=\cos(f(x^2-1))$ allora $g'(x) = -\sin(f(x^2-1))\,f'(x^2-1)\cdot 2x$.

Allora $g'(1) = -\sin(f(0))\,f'(0)\cdot 2 \underset{\uparrow}{=} -\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2} = \underline{-1}$. ■

$f(0)=\frac{\pi}{2}\quad f'(0)=\frac{1}{2}$

Risposta di [Gabriele] su PIAZZA

(*) ancora più semplice $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$

allora $|f|$ e f^2 sono continue su $\mathbb{R}$, ma f non lo è in $x=0$!

[della funz. composta]

12) $f(x)=\sqrt{x}-x^3$ su $[0,+\infty[$, $g(x)=\operatorname{arctg}(x+1)$ su $\mathbb{R}$, $(g\circ f)(x)=\operatorname{arctg}(\sqrt{x}-x^3+1)$

$(g\circ f)'(x)=\frac{1}{1+(\sqrt{x}-x^3+1)^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-3x^2\right)$. Quindi $\underline{(g\circ f)'(1)}=\frac{\frac{1}{2}-3}{2}=\underline{\underline{-\frac{5}{4}}}$. ■

$\forall x>0$

[Derivata della funzione inversa]

13) i) $f(x)=x^3e^{3x-2}$ su $\mathbb{R}$ (continua, derivabile e $\nearrow$)

Oss. che $f(x_0)=e \iff x_0=1$. Inoltre $f'(x)=3x^2e^{3x-2}+3x^3e^{3x-2}$

con $f'(1)=3e+3e=6e$. Quindi $\underline{\underline{(f^{-1})'(e)}}=\frac{1}{f'(1)}=\underline{\underline{\frac{1}{6e}}}$. □

ii) $f(x)=x-e+\log x$ su $]0,+\infty[$ (continua, derivabile e $\nearrow$)

Oss. che $f(x_0)=1 \iff x_0=e$. Inoltre $f'(x)=1+\frac{1}{x}$ con $f'(e)=1+\frac{1}{e}$.

Quindi $\underline{\underline{(f^{-1})'(1)}}=\frac{1}{f'(e)}=\frac{1}{1+\frac{1}{e}}=\underline{\underline{\frac{e}{e+1}}}$. □

iii) $f(x)=x+\operatorname{arctg}x$ su $\mathbb{R}$ (continua, derivabile e $\nearrow$). Oss. che $f'(x)=1+\frac{1}{1+x^2}$

e $f'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Dunque, l'eq. della retta tg. al grafico

di f^{-1} nel pt. $(1+\frac{\pi}{4},1)$ è

$$y=f^{-1}\left(1+\tfrac{\pi}{4}\right)+(f^{-1})'\left(1+\tfrac{\pi}{4}\right)\left(x-1-\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$\iff y=1+\frac{1}{f'(1)}\left(x-1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\iff y=1+\frac{2}{3}\left(x-1-\frac{\pi}{4}\right).$$

Risulta $\underline{y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}-\frac{\pi}{6}}$. ■

[Teorema di Rolle]

14) $f(x)=e^{x(x^2-1)}$ è continua su $[0,1]$, e derivabile su $]0,1[$. Inoltre

$f(0)=f(1)=1$. Quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle.

Abbiamo $f'(x)=e^{x(x^2-1)}(3x^2-1)$ e quindi $f'(c)=0 \iff 3c^2-1=0$

$\iff c^2=\frac{1}{3}$. Abbiamo che $\underline{\underline{c=\frac{1}{\sqrt{3}}}}\in\,]0,1[$ soddisfa $f'(c)=0$. ■

[Teorema di Lagrange]

15) $f(x)=x+\left(g(x)-\sin\frac{\pi}{2x}\right)\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$ soddisfa su $[1,3]$ le ipotesi del teorema

di Lagrange (continua su $[1,3]$; derivabile su $]1,3[$). Inoltre $f(3)=6$

e $f(1)=2$. Quindi $\exists\, x_0\in\,]1,3[$ t.c. $f'(x_0)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{6-2}{3-1}=\frac{4}{2}=2$.

■