

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|

NON SCRIVERE QUI

A

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CdL IN INFORMATICA - CdL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E DELLE COMUNICAZIONI

CdL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E ORGANIZZAZIONE D'IMPRESA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2017-2018 — TRENTO, 11 GIUGNO 2018

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.

È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Non usate il colore rosso.

a1) Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1\}$. Determinate A , B e $A \cap B$.

Risposta:

a2) Scrivete in forma algebrica il numero complesso $z = \frac{3}{2+i}$.

Risposta:

a3) Individuate i punti di accumulazione dell'insieme $A =]0, 2[\cup]2, 4]$.

Risposta:

a4) Determinate l'immagine della funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Risposta:

a5) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ e $g(x) = 2x + 1$.

Determinate l'espressione della funzione composta $(f \circ g)(x)$ su \mathbb{R} .

Risposta:

a6) Calcolate $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x} - 1}$.

Risposta:

a7) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $f(x) = 2 \sin x + \log(1 - x)$.

Risposta:

a8) Determinate i punti di minimo/massimo locale della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Risposta:

a9) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali risulta convergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \cdot \frac{1}{n^2}$.

Risposta:

a10) Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'(x) = 2y(x)$.

Risposta:

b1) i) Determinate per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } x \leq 0 \\ 2e^{-x} + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

risulta continua e derivabile in $x = 0$.

ii) Per i valori individuati in i), tracciate un grafico qualitativo della funzione derivata $f'(x)$ su \mathbb{R} . Determinate $\inf_{x \in \mathbb{R}} f'(x)$ e $\sup_{x \in \mathbb{R}} f'(x)$.

b2) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi, continuità, derivabilità, punti critici e la loro natura) la funzione

$$f(x) = x^3 \log |x|$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

ii) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1, 0)$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della funzione f .

b3) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, per cui esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^2 - (e^x - 1)^2 + x^\alpha}{x \arctan x^3}$$

e calcolatelo.

b4) Determinate l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n} (e^x - 1)^n$.

b5) i) Determinate $\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} dx$.

ii) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, tale che l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x} + x}{x^\alpha (1 + \sqrt[4]{x^5})} dx$ risulti convergente.

b6) i) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Scrivete in matematica il significato di $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

ii) Provate che la funzione composta di due funzioni crescenti è crescente.

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|

NON SCRIVERE QUI

B

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CdL IN INFORMATICA - CdL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E DELLE COMUNICAZIONI

CdL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E ORGANIZZAZIONE D'IMPRESA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2017-2018 — TRENTO, 11 GIUGNO 2018

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.

È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Non usate il colore rosso.

a1) Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 3\}$. Determinate A , B e $A \cap B$.

Risposta:

a2) Scrivete in forma algebrica il numero complesso $z = \frac{2}{3-i}$.

Risposta:

a3) Individuate i punti di accumulazione dell'insieme $A = [0, 3[\cup]3, 5[$.

Risposta:

a4) Determinate l'immagine della funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Risposta:

a5) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ e $g(x) = 2x - 1$.

Determinate l'espressione della funzione composta $(f \circ g)(x)$ su \mathbb{R} .

Risposta:

a6) Calcolate $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1}$.

Risposta:

a7) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $f(x) = 2 \sin(-x) + \log(1+x)$.

Risposta:

a8) Determinate i punti di minimo/massimo locale della funzione $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

Risposta:

a9) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali risulta convergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2\alpha} \cdot \frac{1}{n^4}$.

Risposta:

a10) Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'(x) = 3y(x)$.

Risposta:

b1) i) Determinate per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a^2x + b & \text{se } x \leq 0 \\ 4\log(x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

risulta continua e derivabile in $x = 0$.

ii) Per i valori individuati in i), tracciate un grafico qualitativo della funzione derivata $f'(x)$ su \mathbb{R} . Determinate $\inf_{x \in \mathbb{R}} f'(x)$ e $\sup_{x \in \mathbb{R}} f'(x)$.

b2) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi, continuità, derivabilità, punti critici e la loro natura) la funzione

$$f(x) = -x^3 \log |x|$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

ii) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1, 0)$ e rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della funzione f .

b3) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, per cui esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1)^2 - \sin x^2 - x^\alpha}{2x^2(1 - \cos x)}$$

e calcolatelo.

b4) Determinate l'insieme di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n} (1 - e^x)^n$.

b5) i) Determinate $\int_0^{4\pi^2} \sin \sqrt{x} \, dx$.

ii) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, tale che l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x} + x}{x^\alpha(1 + \sqrt{x^3})} dx$ risulti convergente.

b6) i) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Scrivete in matematica il significato di $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$.

ii) Provate che la funzione composta di due funzioni crescenti è crescente.
