Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica
Corso di Calcolo delle Variazioni - a.a. 2016/17 (periodo 20/02/17-10/05/17)
docente: Prof. Anneliese Defranceschi
e-mail: anneliese.defranceschi@unitn.it
homepage: http://latemar.science.unitn.it/defranceschi

Lezioni: lunedì 11-13, mercoledì 11-13

20/02/17 (2 ore):

Introduzione al corso: orario, indirizzo e-mail, programma (in linea di massima). Ottimizzazione in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{R}^n$) (punti estremi, non-esistenza di minimi/massimi, teorema di Weierstrass, dove vengono a trovarsi eventuali punti estremi, punti critici).
Integrali variazionali (integrando variazionale, funzione di Lagrange o lagrangiana).
Nota sulla non-esistenza di minimi: Esempio di Weierstrass: $F(u) = \int_{-1}^{1} x^2(u'(x))^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$ (esempio di Weierstrass). Non-esistenza del minimo (e del massimo): $F(u) = \int_0^1 \frac{1}{1+(u'(x))^2}\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$.

22/02/17 (2 ore):

Esempi di modellizzazione mediante funzionali integrali (curva di minima lunghezza, brachistocrona, superficie di rivoluzione di area minima, cenno al problema di Didone).
Ottimizzazione in $\mathbb{R}^n$ (punti estremi, punti critici, variazione prima e seconda, cond. necessari e sufficienti affinchè un punto critico sia punto di minimo).
Variazione prima e variazione seconda per $F : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq V$ con V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e punti di minimo.

01/03/17 (2 ore):

Calcolo della variazione prima per funzionali integrali. Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni. **Metodo indiretto (metodi classici)**. Brevi cenni storici. Equazione di Eulero-Lagrange in forma debole (EED). Estremale debole di F. Equazione di Eulero-Lagrange (EE). Estremale di F.
Non-regolarità $\mathcal{C}^2$ di estremali deb. e minimizzanti: $F(u) = \int_{-1}^{1}(u(x))^2[2x - u'(x)]^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$.

06/03/17 (2 ore):

Non-esistenza di un minimizzante $\mathcal{C}^1$: $F(u) = \int_0^1[(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$ (paradosso di Eulero). Il minimo esiste nella classe delle funzioni $\mathcal{C}^1$-a tratti.
Equazione di Eulero-Lagrange per $F(u) = \int_0^1[(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$. Esistenza di un estremale di F in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$ che non è minimo.
Funzioni convesse. Disuguaglianza di Jensen. La convessità della funzione lagrangiana come condizione sufficiente affinchè un estremale di F sia un punto di minimo. Stretta convessità ed unicità degli eventuali minimi. La versione indebolita di stretta convessità.

08/03/17 (2 ore): La versione indebolita di stretta convessità.

L'equazione di Eulero-Lagrange (EE) *(o (EED)) e gli estremali (e loro natura) di* F :
Caso 1): $f(x, u, \xi) = f(\xi)$.
Vari commenti sul caso generale.
1a): Il caso strettamente convesso; il caso convesso. Curva di minima lunghezza (caso non-parametrico).
Problema di minimo di $F_1(u) = \int_0^2(u'(x))^2\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,2]) : u(0) = 5, u(2) = 10\}$.
1b): Discussione sull'esistenza (o non) del minimo per $f(\xi)$ non-convessa.
Il caso $F(u) = \int_0^1[(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = \lambda\}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Lemma trivial (condizione sufficiente per la minimalità mediante funzionale ausiliario). Una sua applicazione diretta al funzionale del doppio pozzo (via convessificazione).

13/03/17 (2 ore):

Non-esistenza del minimo per $F(u) = \int_0^1 e^{(-u'(x)^2}\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$.
Caso 2): $f(x,u,\xi) = f(x,\xi)$.
Commento sul caso generale. Ricerca del punto di minimo di $F(u) = \int_1^2 [u'(x)(1 + x^2 u'(x)]\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,2]) : u(1) = 3, u(2) = 5\}$.
L'equazione di Eulero-Lagrange $(EE)'$. Se f non dipende esplicitamente da x (caso autonomo), allora $\Phi(u,\xi) := f(u,\xi) - \xi f_\xi(u,\xi)$ è un integrale primo del funzionale F.
Equivalenza tra (EE) e $\Phi(u_0, u_0') =$ costante per soluzioni u_0 non costanti.
Caso 3): $f(x,u,\xi) = f(u,\xi)$
3.a) f convessa ($F(u) = \int_{-1}^1 [\frac{k}{2}(u'(x))^2 + gu(x)]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 0\}$; corda elastica).
Disuguaglianza di Poincarè. Disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger.
3.b) f non convessa ($F_\lambda(u) = \int_0^\pi [(u'(x))^2 - \lambda^2(u(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,\pi]) : u(0) = 0, u(\pi) = 0\}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$) (accennato).

15/03/17 (2 ore):

Dimostrazione della disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger.
Studio del problema di minimo di $F_\lambda(u) = \int_0^\pi [(u'(x))^2 - \lambda^2(u(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,\pi]) : u(0) = 0, u(\pi) = 0\}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'integrale primo di $F(x) = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}|x'(t)|^2 - V(x(t))]\,dt$ e la conservazione dell'energia totale (interpretazione fisica dell'equivalenza tra (EE)' e (EE)).
Caso 4): $f = f(x,u,\xi)$
($F(u) = \int_0^1 [\frac{1}{2}(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$; g continua assegnata; esistenza di un unico estremale in X che risulta essere minimo; caso $g(x) = \sin x$).
($F(u) = \int_0^{2\pi} [(u'(x))^2 + (u(x) - g(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,2\pi]) : u(0) = 0, u(2\pi) = \beta\}$; g continua assegnata; esistenza di un unico estremale in X che risulta essere minimo; caso $g(x) = \sin 4x$ con $\beta = 0$ oppure $\beta = 1$).

20/03/17 (2 ore):

Non-esistenza del minimo per $F(u) = \int_0^1 [u^2 + xu']\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 1, u(1) = 0\}$.
Studio del problema della brachistocrona: non-convessità della funzione lagrangiana.
L'integrale primo legato al funzionale della brachistocrona $T(u)$. La soluzione (espressa in forma parametrica) è un arco di cicloide. Essa risulta essere l'unico minimo per $T(u)$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = 0, u(b) = \beta, u > 0 \text{ su }]0,b[\}$. Tempo minimo di percorrenza.

22/03/17 (2 ore):

Confronto con il tempo di percorrenza lungo una retta. Ancora qualche osservazione sulla brachistocrona: confronto con il tempo di percorrenza lungo una semicirconferenza. Tautocronia della cicloide (solo accennato).
Metodo risolutivo per equazioni differenziali del tipo $F(y,y') = 0$ (giustificazione delle scelte fatte nella risoluzione dell'integrale primo legato al funzionale della brachistocrona).
Studio del problema delle superfici di rivoluzione di area minima. Funzioni iperboliche; l'integrale primo legato al funzionale $S(u)$; catenaria, catenoide. Esistenza o non di estremali soddisfacenti le condizioni al contorno. Osservazioni varie sulla loro natura.

27/03/17 (2 ore):

Discussione del problema di minimo per $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + (u(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$; su $\widetilde{X} = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha\}$. Equazione di Eulero-Lagrange con dato al bordo di Dirichlet e di Neumann.
Discussione del problema di minimo per $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + (u(x))^2]\,dx$ su $\widehat{X} = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b])\}$; su $X^* = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = u(b)\}$. Equazione di Eulero-Lagrange con dato al bordo di Neumann (e condizioni al bordo periodiche).

Problemi variazionali con vincolo isoperimetrico: Teorema dei moltiplicatori di Lagrange (enunciato). Il caso convesso.
Applicazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange a $F(u) = \int_0^1 (u'(x))^2\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ con il vincolo isoperimetrico $G(u) = \int_0^1 u(x)\,dx = 1$.

29/03/17 (2 ore):
Dim. del teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Il problema della catenaria (il problema del filo pesante).
Il problema di Didone usando i moltiplicatori di Lagrange. Prima parte.

03/04/17 (2 ore):
Il problema di Didone usando i moltiplicatori di Lagrange. Controllo del vincolo. Verifica delle ipotesi del teorema dei moltiplicatori di Lagrange.
Il problema di Didone usando il teorema di Green nel piano e la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger (il caso generale). La disuguaglianza isoperimetrica.

05/04/17 (2 ore):
Il lemma di du Bois-Reymond. Un corollario del lemma di du Bois-Reymond. L'equazione di Eulero-Lagrange per f e u di classe $\mathcal{C}^1$. L'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale.
Estremali spezzati: l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale e le condizioni di Erdmann-Weierstrass (senza dim.).
Applicazione: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$ su $Y = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ e su $Y^\beta = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = \beta\}$.

10/04/17 (2 ore):
Applicazione: $F(u) = \int_{-1}^1 (u(x))^2 (1 - u'(x))^2\,dx$ su $Y = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$ e su $Y^{\alpha,\beta} = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([-1,1]) : u(-1) = \alpha, u(1) = \beta\}$.
Minimi locali (relativi) deboli e forti (stretti). Ovviamente ogni punto di minimo locale (relativo) forte è un punto di minimo locale (relativo) debole. Non vale il viceversa: la funzione identicamente nulla su $[0,1]$ è un punto di minimo relativo debole, ma non forte, per $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - (u'(x))^4]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.
Analogamente per il funzionale di Scheeffer: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.
La variazione seconda e condizioni sufficienti (coercitività) affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo debole (enunciato). La condizione di positività della variazione seconda non è sufficiente affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo debole: esempio di Scheeffer $(F(u) = \int_{-1}^1 [x^2 (u'(x))^2 + x(u'(x))^3]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = u(1) = 0\})$.

12/04/17 (2 ore):
La condizione di positività della variazione seconda non è sufficiente affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo debole: esempio di Scheeffer $(F(u) = \int_{-1}^1 [x^2 (u'(x))^2 + x(u'(x))^3]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = u(1) = 0\})$. Dim. che $u_0 \equiv 0$ non è un punto di minimo locale debole per F su X.
Dimostrazione della sufficienza della coercitività della variazione seconda affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo debole.
La coercività della variazione seconda non è sufficiente affinchè un estremale debole di F sia un punto di minimo relativo forte (esempio di Scheeffer: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$).
Condizione necessaria di Legendre per minimi relativi deboli. Applicazione agli estremali del funzionale $F(u) = \int_0^1 [3(u'(x))^4 - 20(u'(x))^3 + 36(u'(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\})$.

19/04/17 (2 ore):

Funzione di eccesso di Weierstrass. Condizione necessaria di Weierstrass per minimi relativi forti (senza dim.). Applicazione a $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$. Qualche commento sull'interpretazione grafica della condizione necessaria di Weierstrass. Dalla condizione necessaria di Weierstrass alla condizione necessaria di Legendre.
Lagrangiana accessoria e integrale accessorio.
Introduzione alla teoria di Jacobi per minimi relativi deboli. Equazione (accessoria) di Jacobi. Campi di Jacobi. Null-lagrangian.
Lemma di Legendre. Lemma di Jacobi. Teorema: Condizioni sufficienti per minimi relativi deboli e campi di Jacobi (enunciato).

26/04/17 (2 ore):
Teorema: Condizioni sufficienti per minimi relativi deboli e campi di Jacobi (dim).
Condizione necessaria di Jacobi. Funzione di Jacobi. Punti coniugati. Condizioni sufficienti per minimi relativi deboli e punti coniugati (senza dim.).
Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^b [(u'(x))^2 - (u(x))^2]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = u(b) = 0\}$, al variare di $b > 0$.

27/04/17 (2 ore):
Introduzione alla teoria dei campi di Weierstrass per minimi relativi forti. Campo di estremali (rispetto alla lagrangiana f) e funzione pendenza.
Campo di estremali e funzione pendenza: casi $f(x,u,\xi) = f(\xi)$ e $f(x,u,\xi) = \xi^2 - u^2$.
Equazione di Eulero (modificata) per il campo. Equazioni di Caratheodory. Integrale invariante di Hilbert (rispetto ad f).

03/05/17 (2 ore):
Condizioni sufficienti affinchè un estremale immerso in un campo di estremali sia un punto di minimo assoluto (mediante la funzione eccesso di Weierstrass). Campo di Weierstrass. Condizioni sufficienti affinchè un estremale immerso in un campo di estremali sia un punto di minimo relativo debole (risp. forte) (mediante la condizione di Legendre stretta (risp. forte)) (traccia di dim.).
Condizioni sufficienti affinchè un estremale sia un punto di minimo relativo forte mediante i punti coniugati e la teoria dei campi di estremali (senza dim.).
Applicazione a $F(u) = \int_0^1 u(x)(u'(x))^2\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 1\}$. Studio della natura dell'estremale $u_0(x) \equiv 1$. Dimostrazione che $F(u) = \int_0^1 u(x)(u'(x))^2\, dx$ non ammette minimo assoluto su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 1\}$.
Studio della natura dell'estremale $u_0(x) = kx$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = k\}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

04/05/17 (2 ore):
Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - (u(x))^2]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.
Metodo diretto. Introduzione. Teorema di Weierstrass sui compatti di $\mathbb{R}^n$. Successione minimizzante. Due varianti del teorema di Weierstrass (ruolo della compattezza dei sottolivelli della funzione; ruolo della crescita all'infinito della funzione).
Funzione (seq.) semicontinua inferiormente. Esempi. Osservazioni varie. Caratterizzazioni della (seq.) semicontinuità.
Funzione (seq.) coerciva. Esempi. Teorema di Tonelli (generalizzazione del teorema di Weierstrass - metodo diretto): esistenza del minimo. Unicità del punto di minimo.

08/05/17 (2 ore):
Dim. (diretta) dell'esistenza del minimo per $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)]\, dx$ su $X = L^2(0,1)$.
Convergenza forte e convergenza debole in $L^2(0,1)$. Alcuni risultati astratti (di semicontinuità e compattezza) riguardanti la convergenza forte e la convergenza debole in $L^2(0,1)$ (senza dim.).

1) Tentativo di applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto allo studio del problema di minimo per $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)]\,dx$ su $X = L^2(0,1)$ *rispetto alla convergenza forte e il suo fallimento; rispetto alla convergenza debole.*
2) Tentativo di applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto ad un funzionale integrale dipendente dalla funzione u e dalla derivata u' : $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\,dx$ su $X = C_0^1([a,b])$ con dati nulli al bordo. Teorema di Ascoli-Arzelà (compattezza in $\mathcal{C}^0([a,b])$). La necessità di introdurre un nuovo spazio di funzioni e una convergenza 'naturale' data dal problema.

10/05/17 (2 ore):

Funzioni assolutamente continue $AC([a,b])$: definizioni a confronto e alcune proprietà, confronto con le funzioni lipschitziane, con le funzioni uniformemente continue, $\mathcal{C}^1([a,b])$. Esempio di funzione in $AC([0,1])$, ma non in $\mathcal{C}^1([a,b])$. Lo spazio delle funzioni $H_0^1(a,b)$. Il problema di minimo per $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\,dx$ su $X = H_0^1(a,b)$.

Un risultato di esistenza di un minimo per $F(u) = \int_a^b [f(u'(x)) + g(x)u(x)]\,dx$ su $X = H_0^1(a,b)$.