Università di Trento – Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica, Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni e
Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa

Diario del Corso di Analisi Matematica 1 - a.a. 2018/19
Prof. Anneliese Defranceschi

13/09/18 (2 ore): Introduzione al corso: orario, esercitazioni, ricevimento studenti, sito web, tempi e modalità delle prove di valutazione (compitini in itinere, prova finale).
Proposizioni. Esempi. Connettivi logici (non, e, o, implicazione, doppia implicazione) e la loro tavola di verità. Proposizioni equivalenti. Proprietà di 'e' ed 'o' (commutativa, associativa, distributiva). La negazione ed 'e'; la negazione ed 'o'. La negazione e l'implicazione.
Tautologia. Modus Ponens. Sua applicazione nelle dimostrazioni di teoremi. Principio di contrapposizione. Sua applicazione nelle dimostrazioni di teoremi.
Predicati. Esempi.

14/09/18 (2 ore): Predicati con più variabili. Esempi. Quantificatori (per ogni; esiste). Esempi. Quantificatori e predicati con più variabili.
Negazione di una proposizione contenente quantificatori. Esercizi.
Terminologia sugli insiemi (enumerazione; mediante predicati). Simbolo di appartiene ($\in$) e di non appartiene ($\notin$). Esempi. Insiemi numerici: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$. Proposizioni con quantificatori. Insieme vuoto.
Sottoinsiemi. Uguaglianza di insiemi. Gli insiemi $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$. Gli intervalli limitati (chiusi, aperti,...), gli intervalli illimitati. Esempi. Unione, intersezione di insiemi. Esercizio di insiemistica (scrittura corretta).

17/09/18 (2 ore): Differenza di insiemi, complementare (diagrammi di Venn). Esercizio di insiemistica (scrittura corretta; unione, intersezione, differenza di insiemi). Esercizi di insiemistica (unione, intersezione, differenza di insiemi). Proprietà distributiva delle operazioni di unione ed intersezione. Leggi di de Morgan (complementare ed unione, complementare ed intersezione).
Insieme delle parti di un insieme. Esempi.
Prodotto cartesiano di due insiemi. Esempi. Il prodotto cartesiano $\mathbf{R}\mathrm{x}\mathbf{R}$ e sua rappresentazione grafica.
Algebra elementare dei numeri razionali (l'addizione e la moltiplicazione).
Alcune conseguenze. La legge di annullamento del prodotto (commento sulla sua applicazione). La relazione d'ordine $\leq$ (ordinamento totale) e la compatibilità dell'ordine con le operazioni di somma e prodotto (commento sulle loro applicazioni).

18/09/18 (2 ore): Esercitazione: Qualche elemento di logica e di insiemistica.
Disequazioni con potenze, radici. Insiemi limitati inferiormente/superiormente.

20/09/18 (2 ore): *Proprietà di densità. Proprietà di Archimede.* Corollari della proprietà archimedea.
Teorema: L'equazione $x^2 = 2$ non ha una soluzione in $\mathbf{Q}$ (ossia la radice di 2 non è un numero razionale).
Rappresentazione geometrica di $\mathbf{Q}$: la retta euclidea ha dei 'buchi'!
Introduzione dei numeri reali $\mathbf{R}$ (l'addizione, la moltiplicazione, l'ordinamento come in $\mathbf{Q}$), assioma di continuità.
Rappresentazione decimale dei numeri razionali (allineamenti decimali). Definizione/rappresentazione dei numeri reali usando gli allineamenti decimali.

	Definizione di numero irrazionale. (Approssimazione di radice di due con un allineamento decimale). In **R** valgono ancora la proprietà archimedea e la proprietà di densità (sia dei razionali che degli irrazionali). Esercizio: qualche disequazione, equazione. Il valore assoluto: definizione e proprietà. Disuguaglianza triangolare. Disequazioni con il valore assoluto.
21/09/18 (2 ore):	Disequazioni con il valore assoluto. Maggiorante e minorante di un insieme numerico. Insiemi numerici limitati inferiormente, limitati superiormente, limitati. Esempi. Massimo e minimo di un insieme numerico. Unicità del massimo (minimo), se esiste. Esempi. Estremo superiore e estremo inferiore di un insieme numerico. Confronto con il massimo e il minimo. Esempi. Caratterizzazione dell'estremo superiore/estremo inferiore. Esempi.
24/09/18 (2 ore):	Ancora qualche esercizio su inf/sup. Teorema (*Completezza di* **R**): Esistenza dell'estremo superiore (estremo inferiore) in **R** per sottoinsiemi superiormente limitati (inferiormente limitati). Esercizi. Rappresentazione di sottoinsiemi di **RxR** nel piano cartesiano. a) Potenze ad esponente intero positivo o nullo (proprietà e rappresentazione grafica delle coppie (x,x^m) nel piano cartesiano). b) Potenze ad esponente intero negativo (proprietà e rappresentazione grafica delle coppie (x,x^m) nel piano cartesiano). *Teorema di esistenza della radice n-esima di un numero reale non negativo.* (Cenno della dimostrazione). La radice n-esima di un numero negativo, se n è dispari. Segue da questo teorema la definizione di: c) Potenze ad esponente frazionario (proprietà e rappresentazione grafica delle coppie $(x,x^{1/n})$ nel piano cartesiano). d) Potenze ad esponente razionale (per poter dare una buona definizione ci si deve restringere ad una base strettamente positiva!).
25/09/18 (2 ore):	e) Potenze ad esponente reale e base a > 0 fissata (proprietà e rappresentazione grafica delle coppie (x, a^x) nel piano cartesiano). Esercizi (risoluzione di equazioni e disequazioni). Numero di Nepero **e**. *Teorema di esistenza del logaritmo in base a di un numero positivo* (rappresentazione grafica delle coppie $(x,\log_a x)$ nel piano cartesiano). Notazione: $\log_e x$ sarà sempre denotato con log x. Calcolo di qualche logaritmo. Proprietà dei logaritmi. Esercizi.
27/09/18 (2 ore):	**Esercitazioni:** Disequazioni con valore assoluto, esponenziali e logaritmi. Insiemi limitati inferiormente/superiormente. Massimo/minimo di un insieme. Estremo superiore/estremo inferiore di sottoinsiemi di **R**.
28/09/18 (2 ore):	*Numeri complessi:* forma algebrica. Parte reale e parte immaginaria. L'addizione e la moltiplicazione in **C**. Esempi. La sottrazione e la divisione in **C**. Esempi. Rappresentazione nel piano complesso (piano di Gauss). Interpretazione geometrica della somma di due numeri complessi. Coniugato, modulo e la loro interpretazione geometrica. Esercizi. Argomento. Forma trigonometrica di un numero complesso. Dalla forma algebrica alla forma trigonometrica e viceversa. Esempi.
01/10/18 (2 ore):	Dalla forma algebrica alla forma trigonometrica e viceversa. Esempi. Interpretazione geometrica della moltiplicazione (divisione) di due numeri complessi. *Potenza n-esima di un numero complesso.* Esempi. *Radici n-esime di un numero complesso.* Esempi.

02/10/18 (2 ore): **Esercitazione**: Numeri complessi (forma algebrica/ trigonometrica/ esponenziale; potenze; radici; equazioni; insiemi nel piano di Gauss).

04/10/18 (2 ore): Dimostrazione dell'esistenza delle n radici n-esime di un numero complesso.
Forma esponenziale di un numero complesso. Esercizi.
Risoluzione di equazioni di secondo grado in **C**. Esercizi vari.
Sistemi di numeri complessi. Principio di induzione.

05/10/18 (2 ore): Principio di induzione. Esempi: $10^n \geq n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$; somma dei primi n numeri naturali; la somma geometrica. Disuguaglianza di Bernoulli. $3^n \geq n^3$ per ogni $n \geq 0$. $n! \geq 2^{n-1}$ per ogni $n \geq 0$.
Lasciato per es.: somma dei quadrati dei primi n numeri naturali; $2^n \geq n^3$ per ogni $n \geq 10$.
Funzioni: esempi. Dominio, codominio, legge. Scrittura. Rappresentazione grafica di funzione e non. Dominio naturale (insieme di definizione). Uguaglianza di due funzioni.

05/10/18 (2 ore): Funzione reale (a valori reali) di variabile reale.
Funzioni costanti, l'identità, la restrizione. Immagine di una funzione. Rappresentazione grafica. Grafico di una funzione. Esempio.
Dominio naturale (insieme di definizione): esempi.
Funzioni reali di variabile reale:
Funzioni monotone. Funzione crescente (strettamente crescente)/ decrescente (strettamente decrescente). Esempi. Intervalli di monotonia.
Funzione parte intera, di Heaviside, segno. Funzioni definite a tratti.

08/10/18 (2 ore): Monotonia di $f(x)=ax+b$, per $a \neq 0$. Funzioni definite a tratti.
Funzioni simmetriche. Insieme simmetrico (rispetto all'origine). Funzione pari/dispari. Rappresentazione grafica. Esempi.
Funzioni periodiche. Funzione periodica di periodo T (oppure T-periodica). Intervallo di periodicità. Funzione mantissa. Funzioni trigonometriche: coseno, seno, tangente.
Grafici delle funzioni elementari (dominio, immagine, monotonia, simmetria).
Funzioni limitate. Estremi di una funzione. Funzione limitata superiormente/inferiormente/limitata. Rappresentazione grafica. Esempi.
Estremo inferiore/estremo superiore di una funzione. Esempi.
Caratterizzazione estremo inferiore/estremo superiore di una funzione.
Massimo (globale/assoluto) di una funzione. Punto di massimo. Minimo (globale/assoluto) di una funzione. Punto di minimo. Unicità degli estremi (massimo/minimo), se esistono. Esempi.

09/10/18 (2 ore): **Esercitazione**: Dal grafico di f al grafico di $f(x) \pm a$, di $f(x \pm a)$, di $af(x)$, di $f(ax)$ (traslazioni lungo l'asse y, lungo l'asse x, riscalamenti della variabile dipendente, riscalamenti della variabile indipendente); dal grafico di f al grafico di $|f(x)|$ e di $f(|x|)$.
Funzioni con discussione: monotonia – simmetria – periodicità – limitatezza – sup/inf – max/min.

10/10/18 (2 ore): Successione a valori reali. Termine di una successione. Estremo inferiore e superiore di $a_n = (n-1)/(n+1)$.
Funzione composta. Esempi. Dominio naturale di funzioni ottenute mediante composizione di funzioni elementari. Monotonia della funzione composta a partire dalla monotonia delle funzioni di partenza.
Funzione iniettiva/suriettiva. Esempi. *Funzione biiettiva.*

15/10/18 (2 ore): *La funzione inversa.* Grafico della funzione inversa. Esempi.
Funzioni trigonometriche inverse (arcoseno, arcocoseno, arcotangente). Disequazioni con le funzioni trigonometriche inverse.
Stretta monotonia e invertibilità di una funzione.

Equazioni e disequazioni: risoluzione con il metodo grafico. Determinare, al variare di $k\in\mathbf{R}$, il numero delle soluzioni di un'equazione del tipo $f(x)=k$.

16/10/18 (2 ore): **Esercitazione:** Funzioni composte. Funzione composta con funzioni definite a tratti. Funzione iniettiva/suriettiva. Funzione inversa. Funzioni trigonometriche inverse. Risoluzione di disequazioni con metodo grafico.

18/10/18 (2 ore): *Proprietà locali di una funzione.* La distanza euclidea in $\mathbf{R}$; intorno (sferico) di un punto di R. Insieme degli intorni. *Punto di minimo/massimo locale* (relativo) di una funzione. Punto di minimo/massimo locale stretto (o forte).
Esempio: lettura dei punti estremi (globali e locali) da un grafico.
Introduzione al concetto di limite mediante esempi:
i) limite di una successione a_n per n tendente a $+\infty$.
ii) limiti per una funzione reale definita su $\mathbf{R}\setminus\{2\}$ e rappresentata graficamente.
La retta reale estesa. Intorno di $-\infty$ e di $+\infty$. Punto di accumulazione. Punto isolato. Esempi.

19/10/18 (2 ore): Definizione (unificata) di limite di una funzione.
Commenti sulla definizione (unificata) di limite di una funzione. Casi particolare: $x_0\in\mathbf{R}$ e $l\in\mathbf{R}$; $x_0=+\infty$ e $l=-\infty$ (visto con l'esempio in ii)). Limite finito.
Calcolo di limiti usando la definizione: limite di x^2 per x tendente a 0; limite di n^2 per n tendente a $+\infty$.
Unicità del limite, se esiste. Esistenza del limite finito implica la locale limitatezza della funzione. Teorema della permanenza del segno.
Esempi di non esistenza del limite (funzioni oscillanti!).
Punto di accumulazione sinistro (destro). Intorno sinistro (destro). Limite sinistro (destro).

19/10/18 (1ora): Caratterizzazione del limite mediante il limite sinistro e limite destro. Esempio di non esistenza del limite (caso in cui il limite destro e il limite sinistro esistono ma non coincidono). Esempio di non esistenza del limite destro.
Algebra dei limiti (per limiti finiti). Applicazioni.
Parziale estensione dell'algebra dei limiti con limiti infiniti o nulli.
Dimostrazione del limite del prodotto.

19/10/18 (1ora): **Esercitazione:** Funzione composta con funzioni definite a tratti. Immagine e funzione inversa. Funzioni trigonometriche inverse: disequazioni. Risoluzione di disequazioni con metodo grafico.

22/10/18 (2 ore): *Teorema del confronto (dei due carabinieri).* Esempi. Calcolo di limiti usando l'algebra dei limiti e sua estensione parziale a R esteso.
Forme indeterminate ($+\infty$ - ∞; $0(+\infty)$, ∞/∞, 0/0; e commento sulle forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0); strategie per "uscire dalla forma indeterminata".

23/10/18 (2 ore): *Teorema di esistenza del limite sinistro (destro) di funzioni monotone (dim. Esistenza del limite sinistro per una funzione crescente)*
Esistenza del limite o non. Applicazioni: comportamento delle funzioni elementari agli estremi del loro dominio; determinazione di inf e sup di insiemi senza l'uso della caratterizzazione.
Funzione continua in un punto. Funzione continua. Caratterizzazione della continuità con ε e δ. Continuità da destra e continuità da sinistra.
Somma, prodotto, rapporto di funzioni continue.
Continuità di una funzione definita a tratti. Esempi.
Continuità delle funzioni potenze, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche e trigonometriche inverse (accennato). Limiti usando la continuità delle funzioni elementari.
Limite della funzione composta.

25/10/18 (2 ore): Limite della funzione composta. La funzione composta di funzioni continue è continua. Esempi. *Limiti notevoli delle funzioni trigonometriche.* Esempi

(Limiti di funzioni composte e usando i limiti notevoli delle funzioni trigonometriche. Continuità per funzioni definite a tratti con limiti notevoli).
Infiniti a confronti (logaritmi, potenze ed esponenziali a confronto). Esempi.

26/10/18 (2 ore): Continuità di funzioni definite a tratti (usando la gerarchia degli infiniti).
Dimostrazione che $x/4^x$ tende a 0 per x tendente a $+\infty$. Dimostrazione della gerarchia degli infiniti ($\log_b x$, x^β, a^x per x tendente a $+\infty$). Corollari. Esercizi.
Limite di $f(x)^{g(x)}$, per f(x) positiva in un intorno di x_0. Forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0. Esercizi (limiti notevoli – dati per buono per ora – che possono essere utili in questo caso: $(e^x-1)/x$ tende a 1 per x tendente a 0; $[\log(1+x)]/x$ tende a 1 per x tendente a 0). Esercizi per i casi 0^0, ∞^0, 1^∞.
Limiti di alcune successioni (a^n, $a^{1/n}$, $n^{1/n}$, per n tendente a $+\infty$)

2910/18 (2 ore): Limite di alcune successioni ($(\log_b n)/n^\beta$, n^β/a^n, $a^n/n!$, $n!/n^n$ per n tendente a $+\infty$). Gerarchia degli infiniti. Formula di Stirling.
La successione $(1+1/n)^n$ è strett. crescente e limitata; il suo limite è definito uguale a "e". Alcuni limiti legati ad e: vari corollari. Limiti notevoli: $(e^x-1)/x$ tende a 1 per x tendente a 0; $[\log(1+x)]/x$ tende a 1 per x tendente a 0. Esercizi.

30/10/18 (2 ore): Il limite di $x\log(x)$ per x che tende a 0^+.
Funzione divergente (o infinita; un infinito). Confronto di infiniti. *Infinito di ordine superiore (inferiore). Infinito dello stesso ordine ed infiniti non confrontabili. Funzioni asintotiche.* Esercizi.
Funzione infinitesima e il simbolo o(1). Esempi. "Regole di calcolo" per o(1). Uso di o(1) per il calcolo di limiti.
Confronto di infinitesimi. *Infinitesimo di ordine superiore (inferiore). Infinitesimo dello stesso ordine ed infinitesimi non confrontabili. Funzioni asintotiche.* Esempi (sin x, e^x-1, log(1+x) sono tutte funzioni asintotiche a x, per x tendente a 0). Stime asintotiche e grafici. Esercizi. Infinitesimi a confronto.

06/11/18 (2.30 ore): PRIMA PROVA INTERMEDIA

08/11/18 (2 ore) La notazione f(x)=o(g(x)) per x tendente a x_0. Significato di f(x)=o(g(x)), per x tendente a x_0, se entrambe le funzioni sono infinite (o entrambe sono infinitesime). Esempi. "Regole di calcolo" per $o(x^\alpha)$ per x tendente a 0. L'uso di questo linguaggio nel calcolo di limiti. Limiti con gli "o"-piccoli.

09/11/18 (2 ore): Ordine di infinitesimo (e infinito). Esempi.
Esempi di ordini di infinitesimo. Parte principale di un infinitesimo (rispetto all'infinitesimo x, per x che tende a 0, o rispetto all'infinitesimo ($x-x_0$), per x che tende a x_0.
Asintoti: orizzontali ed obliqui; verticali. Qualche esempio.
Limiti di funzioni e limiti di successioni (teorema ponte). Non esistenza del limite e non solo. Esempi.

12/11/18 (2 ore): Punti di discontinuità.
Teoremi generali per le funzioni continue su un intervallo.
Permanenza del segno. *Teorema di esistenza degli zeri.* Cosa succede se viene a mancare una delle sue ipotesi? Dim. del teorema di esistenza degli zeri (metodo di bisezione).
Applicazione del teorema di esistenza degli zeri per la risoluzione di un'equazione del tipo f(x)=g(x). Corollario: se due funzioni continue f e g su [a,b] verificano f(a)>g(a) e f(b)<g(b) (o viceversa), allora esiste x_0 in]a,b[tale che $f(x_0)=g(x_0)$.
Teorema dei valori intermedi (dim.)

13/11/18 (2 ore): Corollario: L'immagine di un intervallo tramite una funzione continua è ancora un intervallo.
Monotonia e invertibilità: f continua e iniettiva su un intervallo I implica f strettamente monotona su I. Continuità della funzione inversa di una funzione continua e iniettiva su un intervallo.
Teorema di Weierstrass: esistenza del massimo e del minimo di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato [a,b].
Cosa succede se le ipotesi su f e su [a,b] vengono a mancare? A priori non si può dire nulla sull'esistenza di min e max: possono esserci massimo/minimo come possono anche non esserci. Esempi. Commento breve su dove possono 'cadere' eventuali punti di massimo/punti di minimo.
Derivate. Rapporto incrementale. *Derivata di una funzione in un punto.* Derivata destra e derivata sinistra di una funzione in un punto. Funzione derivabile in un punto. Funzione derivabile in un insieme. La funzione derivata.
Teorema: *Se f è derivabile in un punto, è continua nel punto.*
Non vale il viceversa: |x| è continua in x=0, ma non derivabile in x=0.

15/11/18 (2 ore): Interpretazione geometrica della derivata e pendenza della *retta tangente al grafico di una funzione derivabile* (come retta 'limite' di rette secanti). Esempi.

Derivata di alcune funzioni elementari (potenze (reciproche ed inverse), x^{α}, esponenziale, logaritmo, seno, coseno). Esercizi: calcolo della retta tangente al grafico di una funzione (per $f(x)=x^2$ e per $f(x)= x^2$ e $f(x)= e^x$ in qualche punto del grafico).
Comportamento delle funzioni $f(x)=x^3$, f(x)= radice cubica di x, f(x)= senx in un intorno di x=0 mediante la derivata in x=0.
Punti di non derivabilità: punto angoloso, cuspide, punto con tangente verticale. Esempi.
Algebra delle derivate. Derivata della tangente (come derivata del rapporto).
Qualche esercizio di calcolo di derivate usando l'algebra delle derivate e la derivata delle funzioni elementari.

16/11/18 (2 ore): Calcolo di derivate (prodotto e rapporto).
Derivata del prodotto (dim.). Ricerca dell'equazione della retta tangente per varie funzioni in vari punti dei loro grafici e la loro rappresentazione grafica.
Qualche esercizio sulla derivabilità di una funzione definita a tratti (f(x)= xlog x per x> 0, e f(0)=0; una da determinare i parametri a e b tali che la funzione definita a tratti risulti derivabile) e o con la presenza del valore assoluto ($f(x)= e^{-|x|}$) usando la definizione di derivabilità, ma accennando (e usando) anche al corollario importante del teorema di de l'Hopital (che sarà dimostrato successivamente):
Teorema: (i)Sia f continua in un intorno destro (risp. sinistro) di x_0 (compreso il punto x_0) e derivabile per gli x a destra (risp. a sinistra) di x_0, con x diversi da x_0.
Se esiste $\lim_{x\to x\_0^+} f'(x)$ in **R** (eventualmente anche -∞ o +∞) allora esiste $f'_+(x_0)$ e vale $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x\_0^+} f'(x)$ (risp. per la derivata sinistra in x_0).
(ii) Sia f continua in un intorno di x_0 e derivabile per gli x diverso da x_0.
Se esiste $\lim_{x\to x\_0} f'(x)$, allora esiste $f'(x_0)$ e vale $f'(x_0)= \lim_{x\to x\_0} f'(x)$. In particolare, se $\lim_{x\to x\_0} f'(x)$ esiste finito, allora f è derivabile in x_0.
Uso di questo per gli esercizi trattati sopra.
Teorema: derivata della funzione composta. Qualche esercizio di calcolo.

19/11/18 (2 ore): Teorema: derivata della funzione inversa (dim.)
Commento sulla derivata della funzione inversa nei casi in cui $f'(x_0)=0$ oppure $f'(x_0)= +\infty$ ($-\infty$).
Es. Calcolo della derivata della funzione inversa in un punto di una funzione strettamente crescente e derivabile in **R** senza la determinazione analitica della funzione inversa.
Derivata della funzione arctgx, arcsinx, arccosx.
Esercizi vari sulla derivabilità.
Lemma: se $f'(x_0)$ è diverso da 0, allora $f(x)-f(x_0)$ cambia segno attraversando x_0.
Estremi locali e derivate: Punto critico (o stazionario) di una funzione.

Teorema di Fermat (dim.)

I punti estremi (max/min) locali di una funzione continua f:[a,b] $\longrightarrow$R sono da ricercare tra i punti critici, tra gli estremi dell'intervallo e tra punti di non derivabilità di f.
Teorema del valor medio o di Lagrange. Interpretazione geometrica.

20/11/18 (2 ore): *Teorema di Rolle* (dim. del teorema di Rolle e poi la dim. del teorema di Lagrange). Controesempi al teorema di Rolle, se manca una delle sue ipotesi. *Teorema di Cauchy* (dim).
Conseguenze del teorema di Lagrange:
a) se f'(x)=0 per ogni x dell'intervallo I, allora f è costante in I.
L'importanza che I sia un intervallo.

Applicazione: arctan x + arctan (1/x) = $\pi/2$ per ogni x in]0,+∞ [.
b) Test di monotonia: segno di f' in]a,b[e la monotonia di f in]a,b[.
L'importanza che I sia un intervallo.
Studio della natura dei punti critici di una funzione usando il segno della derivata nell'intorno dei punti critici.
Studio qualitativo della funzione $f(x)=xe^{-x^2}$; massimo e minimo di f su [0,2].

22/11/18 (2 ore): Determinare, al variare di k in **R**, il numero delle soluzioni dell'equazione e^x-x=k. Lasciato per esercizio: studio qualitativo delle funzioni f(x)=xlog x; $f(x)=(x-1)/(x^2+1)$; $f(x)= x/(x^2-4)$.
Forme indeterminate 0/0 e ∞/∞ e il *Teorema di de l'Hopital (dim. caso 0/0).*
Limiti vari (bisogna usare con oculatezza il teorema di de l'Hopital).
Attenzione: a) La non-esistenza del limite di f'(x)/g'(x) non implica la non-esistenza del limite di f(x)/g(x).
b) L'importanza di essere una forma indeterminata del tipo 0/0 e ∞/∞.

Corollario importante del teorema di de l'Hopital:
Teorema: Sia f continua in un intorno destro (risp. sinistro) di x_0 (compreso il punto x_0) e derivabile per gli x a destra (risp. a sinistra) di x_0, con x diversi da x_0.
(i) Se esiste $\lim_{x\to x_0^+}$f'(x) in **R** (eventualmente anche -∞ o +∞) allora esiste
$f'_+(x_0)$ e vale $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+}$f'(x) (risp. per la derivata sinistra in x_0).
Sia f continua in un intorno di x_0 e derivabile per gli x diverso da x_0.
(ii) Se esiste $\lim_{x\to x_0}$f'(x), allora esiste f'(x_0) e vale f'(x_0)= $\lim_{x\to x_0}$f'(x). In particolare, se $\lim_{x\to x_0}$f'(x) esiste finito, allora f è derivabile in x_0.

Attenzione: a) E' fondamentale la continuità della f in x_0.
b) Può capitare che $\lim_{x\to x_0}$f'(x) non esista, ma che la funzione f sia derivabile comunque in x_0. Esempio: f(x) definita da x^2sen (1/x) per x diverso da 0 e 0 per x=0.
Esercizi sulla continuità/derivabilità di una funzione definita a tratti con parametri.
Studio qualitativo della funzione f(x)=((x^3-1)/x)^(1/2).

23/11/18 (2 ore): Studio qualitativo di f(x)=((x^3-1)/x)^(1/2); f(x)= arctg(|x-1|/x). Attenzione ai punti con tangente verticale o punti angolosi. Studio qualitativo di f(x)= log((x^2-2|x|+1)/(x+1)). Attenzione ai punti angolosi. Esercizi: limiti con de l'Hopital. Derivata della funzione inversa.

26/11/18 (2 ore): *Derivate successive.* Derivata seconda e qualche calcolo.
Funzioni convesse (concave) e strettamente convesse (strett. concave). Rappresentazione grafica. Definizione di funzione convessa (concava) e strettamente convessa (strett. concava).
Ogni funzione convessa su un intervallo I può essere discontinua al più negli estremi di I. Esempio di funzione convessa che non è derivabili in qualche punto di I. Le funzioni potenze pari sono funzioni strett. convesse in **R**.
Caratterizzazione delle funzioni convesse (strett. convesse) e derivabili su I.

Caratterizzazione delle funzioni convesse e derivabili 2 volte su I. Esempio: $f(x)=x^2$, $f(x)=e^x$ sono strettamente convesse su **R**; $f(x)= \log_a x$ è strettamente convessa su $]0, +\infty[$ se $0<a<1$, è strettamente concava su $]0, +\infty[$ se $a>1$. *Punto di flesso.*
Se f è derivabile due volte in un punto di flesso x_0 in $]a,b[$, allora $f''(x_0)=0$.
(non vale il viceversa: $f(x)=x^4$ in $x_0=0$).
Studio di funzione: schema per affrontare in generale lo studio qualitativo di una funzione.
Studio qualitativo delle funzioni $f(x)=x-1+2/(1+|x|/2)$ e $f(x)=(\log x)/(1+\log x)$. Lasciato per esercizio studio qualitativo di $f(x)=$ radice$(1-|e^{2x}-1|)$.

27/11/18 (2 ore): Commento: Studio qualitativo della funzione $f(x)=(x-1)e^x$; $g(x)=|x-1|e^x$; $h(x)=(x-1)e^{|x|}$; $k(x)=|x-1|e^{|x|}$. Lasciato per esercizio lo studio qualitativo di $f(x)=e^{x|x-1|}$.
Il problema dell'approssimazione di una funzione in un intorno di un punto mediante polinomi: polinomio di Taylor.
Teorema (*Formula di Taylor con il resto di Peano*). *Polinomio di Taylor di ordine n associato ad f e centrato nel punto x_0*; è l'unico polinomio $P_n(x)$ tale che $f(x)= P_n(x) + o((x-x_0)^n)$. Esercizi.
Calcolo del polinomio di Taylor $P_n(x)$ di ordine n centrato in $x_0=0$ delle seguenti funzioni: e^x, $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg} x$, $\arctan x$, $(1+x)^\alpha$.

29/11/18 (2 ore): Es. Calcolo di polinomi di Taylor di ordine 3, 4, 5 centrati in $x_0=0$ di qualche funzione composta. Calcolo del polinomio di Taylor con resto di Peano in punti $x_0\neq 0$.
Determinazione della parte principale di un infinitesimo. Individuazione del grafico di una funzione in un intorno di $x_0=0$ conoscendo il suo sviluppo di Taylor. Calcolo di limiti di forme indeterminate 0/0 in 0 (con e senza parametro) usando gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari in $x_0=0$.

30/11/18 (2 ore): Dim. Formula di Taylor (traccia). Presentazione visiva dell'approssimazione (funzioni e^x e $\sin x$ nell'intorno di 0).
Limiti utilizzando gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari in $x_0=0$: esercizi.
Teorema (*Formula di Taylor con il resto di Lagrange*) (enunciato). Dim. che $\cos x > 1-x^2/2$ per ogni x diverso da 0. Il numero di Nepero e come serie di $1/n!$
Stime del valore di e (tramite l'uso dello sviluppo di Taylor di e^x, per x=1, con il resto di Lagrange). La funzione e^x come serie di $x^n/n!$

30/11/18 (2 ore): Introduzione alle serie. Paradosso di Zenone di Elea (sommando infinite quantità positive possiamo ottenere una somma finita? La storia di Achille e la tartaruga. Da leggere su Wikipedia)
Motivazione euristica del fatto che $1+1/2+1/4+...+1/2^n +...$ abbia somma finita uguale a 2, e motivazione geometrica che $1/2+1/4+...+1/2^n +...$ abbia somma finita uguale a 1.
Definizione di *serie numerica*. Successione delle *somme parziali*. Carattere di una serie (convergente, divergente, indeterminata o irregolare).
La serie $\Sigma 1/2^n$ come esempio di serie convergente e somma 2; la serie Σn come esempio di serie divergente positivamente; la serie $\Sigma(-1)^n$ come esempio di serie indeterminata.
La serie geometrica Σq^n. La serie $\Sigma 1/2^n$ come caso particolare.

Prova che 0.999... =1. La serie $\Sigma 1/$(radice di n). La serie di Mengoli $\Sigma 1/n(n+1)$ come caso particolare delle serie telescopiche $\Sigma(b_n - b_{n+1})$.

03/12/18 (2 ore): La serie $\Sigma 1/n!$. Commenti sul carattere della serie $\Sigma(a_n+b_n)$ a partire dal carattere delle serie Σa_n e Σb_n. Cosa succede per $\Sigma a_n b_n$?
Criteri di convergenza per serie numeriche:

Teorema: Condizione necessaria affinchè una serie Σa_n sia convergente, è che la successione $\{a_n\}$ sia infinitesima.

Tale condizione non è sufficiente: $\Sigma 1/$(radice di n) è una serie divergente nonostante 1/(radice di n) sia un infinitesimo per n tendente a $+\infty$.

Teorema: Condizione necessaria affinchè una serie Σa_n sia convergente, è che il la successione delle code della serie sia infinitesima (senza dim.).

Applicazione: La serie armonica $\Sigma 1/n$ è divergente.
Criteri di convergenza per serie a termini non-negativi: Criterio del confronto.

La serie $\Sigma 1/n^{\alpha}$ per ogni α (manca la dim. per $1<\alpha<2$). Criterio del confronto asintotico (per serie a termini positivi). Qualche esempio. La serie $\Sigma 1/n^{\alpha}$ e la serie $\Sigma 1/[n^{\alpha}(\log n)^{\beta}]$. Qualche esercizio ancora usando il criterio del confronto asintotico.

04/12/18 (2 ore): Dim. del criterio del confronto asintotico.
Criterio della radice n-esima (con dim.). Criterio del rapporto (cenno di dim.).
Esercizi usando il criterio del confronto asintotico, il criterio della radice n-esima e il criterio del rapporto.

05/12/18 (2 ore): *Serie a termini di segno variabile:* serie assolutamente convergente. Criterio della convergenza assoluta (convergenza assoluta implica convergenza). La serie serie $\Sigma(-1)^n/n$ (esempio di serie convergente ma non assolutamente convergente). La convergenza di tale serie segue dal criterio di Leibniz per le serie a segno alterno.
Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibniz. Esercizi.
Varie osservazioni sulla convergenza assoluta, convergenza (semplice) e il criterio di Leibniz.

06/12/18 (2 ore): Serie dipendenti da un parametro (o serie di funzioni). Esercizi.
Serie di potenze. Definizione ed def. insieme di convergenza. La serie geometrica come caso particolare di una serie di potenze. Esercizio modello.
Insieme di convergenza e raggio di convergenza.

Teorema: Se r è il raggio di convergenza della serie $\Sigma a_n(x-x_0)^n$, allora la serie converge assolutamente per ogni x tale che $|x-x_0|< r$, e non converge per ogni x tale che $|x-x_0|> r$. Nulla si può dire a priori sulla convergenza della serie nei punti $x = x_0 - r$ e $x= x_0 + r$.
Teorema: Criterio per la determinazione del raggio di convergenza per la serie $\Sigma a_n(x-x_0)^n$.
Esercizi sulla determinazione del raggio di convergenza di alcune serie di potenze. Determinazione dell'insieme di convergenza per serie di potenze o serie riconducibili a serie di potenze.

07/11/18 (2 ore): Conclusione dell'esercizio iniziato nella lez. precedente. Ancora qualche esercizio sulla convergenza di serie/serie di potenze.
Serie di Taylor. Ogni serie di Taylor per funzioni $C^{\infty}(]a,b[)$ è convergente? Se essa è convergente, allora la sua somma coincide con la funzione stessa? La seconda domanda non è obsoleta: esempio di una funzione $C^{\infty}(\mathbf{R})$, la cui serie di

Taylor in 0 è nulla, ma essa non è nulla al di fuori di 0. Funzione sviluppabile in serie di Taylor.
Le funzioni e^x, sin x, cos x log(1+x) e arctan x sono sviluppabili in serie di Taylor con centro 0.
Integrazione – Integrale di Riemann. Introduzione:
a) il problema di trovare una buona definizione di 'area' per una regione piana sottografico di una funzione;
b) il problema di trovare un algoritmo facile per calcolare poi tale area.
Archimede e il metodo di esaustione: calcolo dell''area' del sottografico di $f(x)=x^2$ sul segmento [0,b].

10/12/18 (2 ore): *Suddivisione D* di [a,b]. *Somma inferiore di* f *relativa alla suddivisione D denotata s(D,* f*). Somma superiore di* f *relativa alla suddivisione D denotata S(D,* f*).* Proprietà di *s(D,* f*) e S(D,* f*).*
Funzione integrabile (secondo Riemann). Integrale di Riemann per funzioni limitate su [a,b]. Esempio di funzione non-integrabile su [a,b] (la funzione di Dirichlet).
L'integrale e l'area. Interpretazione geometrica dell'integrale. Calcolo di qualche integrale usando l'interpretazione geometrica dell'integrale.
Classi di funzioni integrabili: le funzioni monotone su [a,b]; le funzioni continue su [a,b]; funzioni generalmente continue su [a,b].
Proprietà dell'integrale: linearità dell'integrale rispetto alla funzione integranda; monotonia, additività dell'integrale rispetto all'intervallo d'integrazione (formula di spezzamento).
Teorema della media integrale: Se f è una funzione continua su [a,b], allora esiste $c\in[a,b]$, tale che f(c)=media integrale di f su [a,b]. Interpretazione geometrica.
Funzione primitiva. Definizione e qualche esempio.
Estensione dell'integrale ad un intervallo orientato (ossia definizione di integrale definito). Restano conservate tutte le proprietà dell'integrale visto sopra (solo la proprietà di monotonia va opportunamente modificata).
Funzione integrale $F_c(x)$ *di* f *relativa ad un punto* c in I
Es: Sia f definita su [a,b]. Tracciare un grafico qualitativo di $F_a(x)$ usando l'interpretazione geometrica dell'integrale.
Teorema fondamentale del Calcolo Integrale (TFC): Se f(x) è continua in I, c $c\in I$, allora la funzione integrale $F_c(x)$ è una primitiva di f.

11/12/18 (2 ore): Dimostrazione del TFC.
Oss: La funzione integrale ha sempre un grado di regolarità in più rispetto alla funzione integranda.
Es: Determinazione del grafico della funzione integrale $F_0(x)$ relativa alla funzione $f(x)=e^{-x^2}$ vicino a x=0.
Calcolo di limiti con la funzione integrale (usando de l'Hopital e gli sviluppi di Taylor). Formula della derivata della funzione integrale con estremi funzioni di x.
Esercizi vari sulla funzione integrale (Polinomio di Taylor, punti critici e loro natura).
Funzione primitiva. Osservazioni varie:
1) se F(x) è una primitiva di f(x), allora anche F(x)+c lo è per ogni $c\in\mathbf{R}$;
2) se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ sono due primitive di f(x), allora $F_1(x) = F_2(x)+ c$.
3) dal TFC e da 2) segue che se F(x) è una primitiva di una funzione continua f(x) su I, allora $F(x)= F_a(x) + c$, dove $F_a(x)$ è la funzione integrale di f relativa al punto a in I.
Teorema di Torricelli-Barrow (dim.) Un esempio.
Oss.: Abbiamo visto che se F(x) è una primitiva di una funzione continua f(x) su I, allora $F(x)= F_a(x) + c$, dove $F_a(x)$ è la funzione integrale di f relativa al punto a in I. Questo fatto porta all'introduzione del concetto di *integrale indefinito* $\int$ f(x)dx come insieme di tutte le primitive di f rispetto alla variabile x.

Oss: Attenzione: non confondere i concetti di integrale definito di f (è un numero reale), di funzione integrale di f (è una funzione) e di integrale indefinito di f (è un simbolo che denota l'insieme delle funzioni primitive di f).
Tabella delle primitive immediate (e quasi).

12/12/18 (2 ore): *Oss.* Nonostante ogni funzione continua abbia sempre primitiva, non è detto che tale primitiva si possa esprimere mediante funzioni elementari. Es. e^{-x^2}, (sinx)/x, (cosx)/x, $\sin x^2$.
Esercizi vari: calcolo di integrali definiti immediati o quasi. Calcolo dell'area di un sottografico; calcolo di aree di regioni piane delimitate da grafici di funzioni.
Alcuni metodi utili per il calcolo di primitive:
Formula d'integrazione per parti; esercizi.

13/12/18 (2 ore): Ancora qualche esercizio di integrazione per parti.
Formula d'integrazione per sostituzione; esercizi. Qualche sostituzione speciale (t=tg(x/2) ossia x=2arctg t; x=sinh t).
Integrazione di funzioni razionali (al denominatore polinomio di grado minore o uguale a 2).

14/12/18 (2 ore): *Integrali generalizzati (o impropri).*
Integrazione per funzioni non limitate: Funzione integrabile (in senso improprio o generalizzato) in [a,b[e integrale convergente (divergente positivamente, divergente negativamente, che non esiste). Analoghe definizioni su]a,b].
Esempi: integrabilità di $1/x^{\alpha}$ su]0,1]; più in generale di $1/(x-a)^{\alpha}$ su]a,b], di $1/(b-x)^{\alpha}$ su [a,b[. Integrabilità di $1/[x(-\log x)^{\beta}]$ su]0,1/2].
Integrazione per funzioni su intervalli illimitati: Funzione integrabile (in senso improprio o generalizzato) in [a,+∞[e integrale convergente (divergente positivamente, divergente negativamente, che non esiste). Analoghe definizioni su]-∞,b].
Esempi: integrabilità di $1/x^{\alpha}$ su [1,+∞[; integrabilità di $1/[x(\log x)^{\beta}]$ su [2,+∞[.
Qualche studio di convergenza usando la definizione.

17/12/18 (2 ore): Estensione del concetto di integrale generalizzato su]a,b[(possibilmente anche]-∞,+∞[).
Criteri di convergenza: *Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico.*
Esercizi.
Funzioni assolutamente integrabili.
Esercizi sull'integrabilità usando il criterio del confronto e del confronto asintotico.
Serie e integrali generalizzati. Convergenza della serie armonica generalizzata $\Sigma 1/n^{\alpha}$ se $\alpha > 1$. Convergenza della serie $\Sigma 1/[n(\log n)^{\beta}]$ se $\beta > 1$.
Esercizi.

18/12/18 (2 ore): L'integrabilità della funzione gaussiana $e^{\wedge}(-x^2)$ su [0,+∞[.
Ancora qualche commento sugli integrali generalizzati.
Equazioni differenziali ordinarie di ordine n. Eq. diff. in forma normale. Integrale generale di un'equazione differenziale.
Esempi di integrali generali: y'(x)=g(x). y'(x)=ay(x) (il modello di Malthus della dinamica di una popolazione isolata), y'(x)=2y(x)+x; y''(x)=x.
Il problema di Cauchy per y'(x)=f(x,y(x)). Il problema di Cauchy per y''(x)=f(x,y(x),y'(x)). Esempi.
Esistenza 'locale' di una soluzione di un problema di Cauchy: esistenza locale per $y'(x)= y^2(x)$ con y(0)=1.
Metodo risolutivo per equazioni differenziali a variabili separabili: y'(x)=h(x)g(y(x)).
Esempi (eq. differenziali di variabili separabili): L'integrale generale di y'(x)=3y(x); $y'(x)=y^2(x)$; $y'(x)=e^{-y(x)}$; y'(x)=-2x(y(x)-1).

20/12/18 (2 ore): Ancora un'equazione diff. a variabili separabili: y'+xtgy=0.
Metodo risolutivo per eq. diff. lineari del primo ordine a coefficienti variabili: y'(x)=a(x)y(x)+b(x). Integrale generale dell'equazione omogenea. Integrale generale dell'equazione completa y'(x)=a(x)y(x)+b(x) come somma dell'integrale generale dell'equazione omogena e di una soluzione particolare dell'equazione completa. Esercizi: Problema di Cauchy y'(x)-y(x)=1, y(0)=0.
Integrale generale di y'(x)=2y(x) + x; y'(x)=(1/x)y(x)+x^2+1; Problema di Cauchy y'(x)=y(x)+ sinx, y(0)=0. Integrale generale di y'(x) + (cosx/sinx)y(x)-e^x=0; y'(x) =1/(x^(1/2))y(x)+1.
Metodo risolutivo per eq. diff. lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: Caso omogeneo.
Esercizi: Integrale generale di y"=y ; y"-2y'+y=0 ; y"=-y.

21/12/21 (2 ore): Problema di Cauchy y"-2y'-8y=0, y(1)=1, y'(1)=0.
Metodo risolutivo per eq. diff. lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: Caso completo.
Integrale generale di y"-y =x^2+x; y"-y' =x^2+x.
Integrale generale di y"+y'+y= sin x; y"+4y=3cos2x.
Integrale generale di y"-4y'+3y= 3e^{2x}; y"-4y'+3y= 4e^x.
Esercizi per concludere: Studio qualitativo di funzioni. Serie.

21/12/18 (2.30 ore): Seconda Prova Intermedia