Consideriamo $\boxed{x \in \mathbb{R},\ x > 0}$ fissato $\rightsquigarrow \boxed{a}$ chiamiamo

mentre gli esponenti saranno $q, r, s \in \mathbb{Q}$

È ben definito a^r con $r \in \mathbb{Q}$.

Dalle proprietà delle potenze seguono le seg.

Proposizione: $\forall a, b \in \mathbb{R}, > 0$ $\boxed{\forall s, r \in \mathbb{Q}}$

si hanno le solite proprietà delle potenze:

$(a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $(a^r)^s = a^{rs}$ $(ab)^r = a^r b^r)$

Inoltre

(i) $a^r > 0$, $a^0 = 1$

(ii) $\begin{cases} a^r > 1 & \text{se } a > 1 \text{ e } r > 0 \text{ oppure} \\ & 0 < a < 1 \text{ e } r < 0 \\ a^r < 1 & \text{se } a > 1 \text{ e } r < 0 \text{ oppure} \\ & 0 < a < 1 \text{ e } r > 0. \end{cases}$

(iii) $r < s \Rightarrow \begin{cases} a^r < a^s & \text{se } a > 1 \text{ (crescente!)} \\ a^r > a^s & \text{se } a < 1 \text{ (decrescente!)} \end{cases}$

(iv) $0 < a < b \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} a^r < b^r & \text{se } r > 0 \\ a^r > b^r & \text{se } r < 0 \end{array}\right\}$ confronto di basi!

(v) $\forall a \neq 1$ $a^r = a^s \Rightarrow r = s$.

Siamo ora pronti per introdurre l'esponenziale di base $a > 0$ $(a \neq 1$; infatti $1^x \equiv 1)$ ed esponente in $\mathbb{R}$.

e) Esponenziale $\boxed{a^x}$ (base a ed esponente $x \in \mathbb{R}$)

- $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ $\quad x = p.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$

$$a^x \doteq \sup\left\{a^{p.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

NOTA: $p.\alpha_1\ldots\alpha_n \in \mathbb{Q}$
quindi $a^{p.\alpha_1\ldots\alpha_n}$ è ben definito in d)
$\left\{a^{p.\alpha_1\ldots\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\right\} \neq \emptyset$
limitato sup., per esempio, da a^{p+1}

- $0 < a < 1$, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$

$$a^x \doteq \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$$

> 1 e quindi $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ è definito

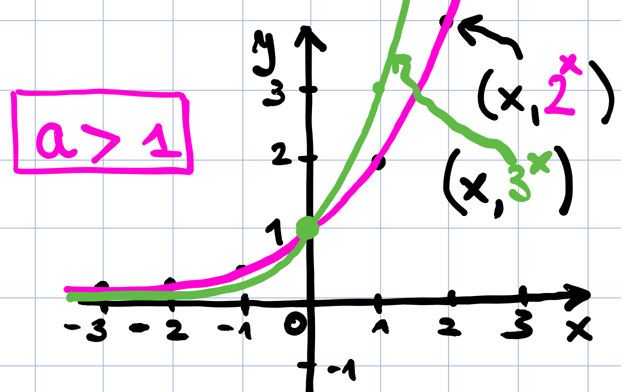
- $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$

$$a^x \doteq \frac{1}{a^{-x}}$$

è ben definito perchè $-x > 0$.

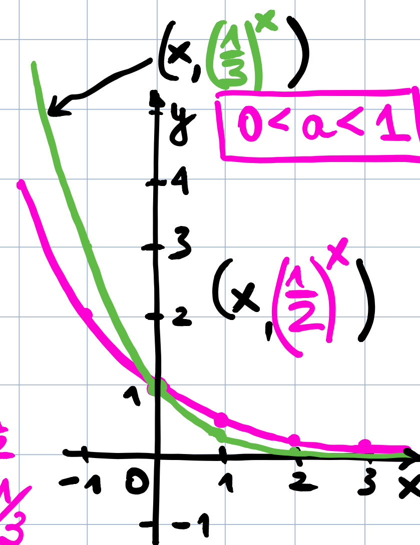
NOTA: Rimangono soddisfatte per a^x $\boxed{x \in \mathbb{R}}$ tutte le proprietà elencate sopra per a^r, $r \in \mathbb{Q}$.

Esse sono ben evidenti dalle seg. rappresentazioni grafiche di (x, a^x) $x \in \mathbb{R}$, $a>0$, $a \neq 1$.



$a=2$

$a=3$

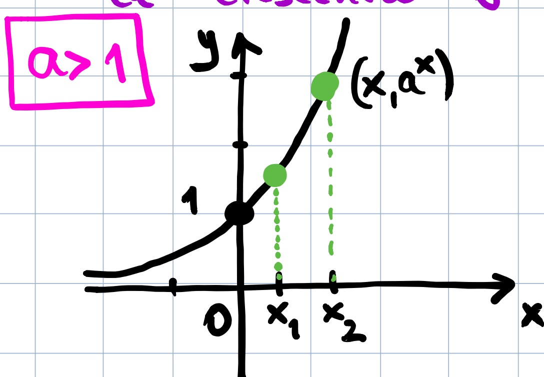


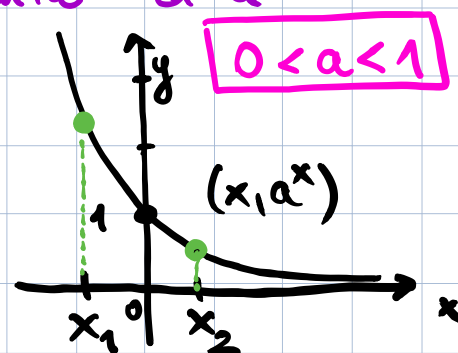
$a=\frac{1}{2}$

$b=\frac{1}{3}$

Ricordare per la risoluz. di diseq!

la "crescenza" o "decrescenza" di a^x





$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$

$(\Leftarrow)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

$(\Leftarrow)$

IMPORTANTE è $\boxed{e^x}$, $e = 2.7182818\ldots$

Nepero!

Es. Risolvete in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

i) $2^{x^2-x} \leq 1$ • oss. la rappr. grafica di $(x, 2^x)$ possiamo dire che

$$2^{x^2-x} \leq 1 \iff x^2-x \leq 0$$

$$\iff 0 \leq x \leq 1$$

$S = [0,1]$.

•• $2^{x^2-x} \boxed{\leq} 2^0 \underset{2^x \text{ "crescente"}}{\iff} x^2-x \boxed{\leq} 0$

$\Rightarrow S = [0,1]$ □

ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2} \boxed{\leq} \left(\frac{1}{3}\right)^x \underset{\left(\frac{1}{3}\right)^x \text{ è "decrescente"}}{\iff}$

$$x^2-2 \boxed{\geq} x$$

$$\underbrace{x^2-x-2}_{(x-2)(x+1)} \geq 0$$

$\Rightarrow S =]-\infty,-1] \cup [2,+\infty[$ □

iii) $\dfrac{2^x \cdot 2^{x^2}}{4^x} > 1 \iff 2^x \cdot 2^{x^2} \cdot 2^{-2x} > 1$

$\iff 2^{x^2-x} \boxed{>} 1 \quad (=2^0)$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - x \boxed{>} 0$$

$$\Rightarrow \quad S =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

$\square$

iv) $\frac{1}{9} < 3^{-x+2} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \quad 3^{-2} < 3^{-x+2} \leq 3^0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 < -x+2 \leq 0$$

3^x "crescente"

$$\Leftrightarrow \quad -4 < -x \leq -2$$

$$\Rightarrow \quad 4 > x \geq 2$$

$S = [2, 4[$.

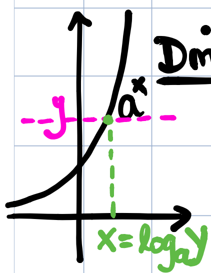
Logaritmo

Il logaritmo lo otteniamo come soluzione dell'eq. del tipo $a^x = y$, $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$.

Teorema (esistenza del logaritmo)
Siano $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$.
Allora $\exists! \, x \in \mathbb{R} : a^x = y$.

La soluzione x si chiama logaritmo in base a di y e si indica $x \doteq \log_a y$

Ovviamente • $a^{\log_a y} = y \quad \forall\, y>0$!!



Dim. si base sulla teoria del sup e si procede analog. a quanto fatto per l'esistenza della radice n-esima. ■

Es. • $\log_3 9 = x$ t.c. $3^x = 9$

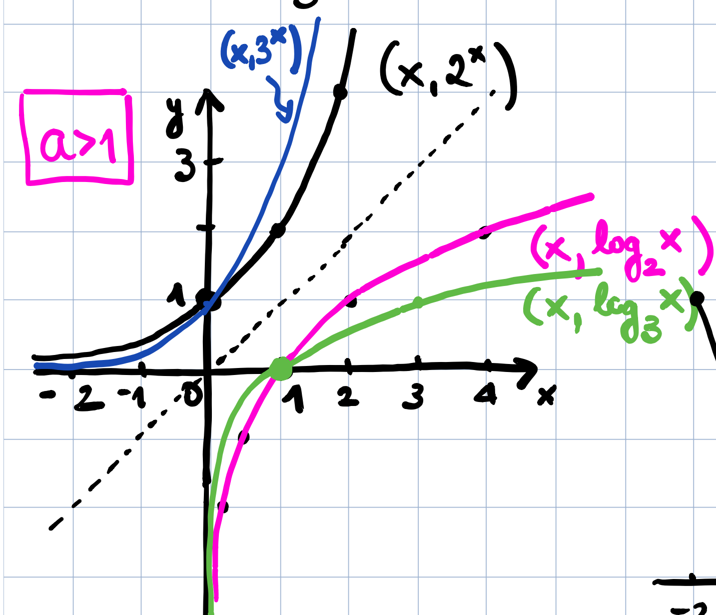
$$\iff 3^x = 3^2$$

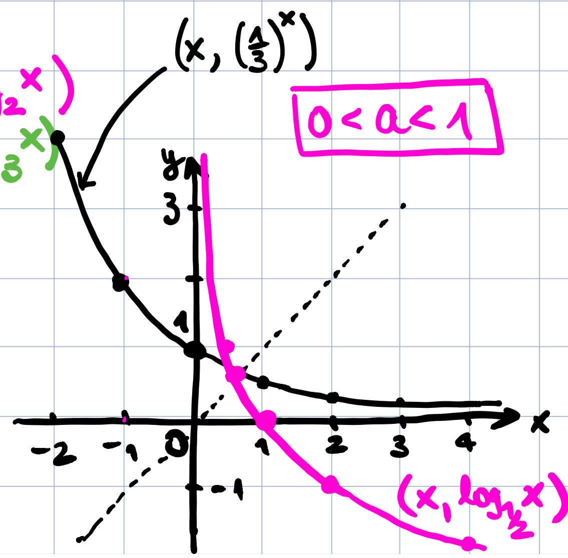
$$\iff x = 2$$

$$\Rightarrow \log_3 9 = 2 \qquad \square$$

• $\log_3 1 = 0$ perché $3^0 = 1$ □

• $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1$ perché $\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$. ■





Prop. $\forall a, b \in \mathbb{R}, > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$

i) $\boxed{a^{\log_a x} = x \quad \forall x > 0}$

ii) $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

iii) $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$

$\Bigg\} \; x_1, x_2 > 0$

iv) $\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a x \qquad x > 0, \; \alpha \in \mathbb{R}$

in particolare: $\boxed{\log_a a^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

v) $\log_a 1 = 0 \quad , \quad \log_a a = 1$

vi) $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \log_a x_1 < \log_a x_2 & \boxed{a > 1} \\ \log_a x_1 > \log_a x_2 & \boxed{a < 1} \end{cases}$

vii) cambio di base:

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \qquad \forall x > 0$$

in particolare $\log_a x = -\log_{1/a} x$

Es. Risolvete in $\mathbb{R}$ le seg. diseq.

i) $\log_2(x^2-1) \leq 1$

$$1 = \log_2 2$$

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1 \leq 2 \end{cases}$$

(altrimenti non è def. $\log_2$)

($\log_2 x$ è "crescente")

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2>1 \\ x^2 \leq 3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x<-1 \quad o \quad x>1 \\ -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow S = [-\sqrt{3},-1[\,\cup\,]1,\sqrt{3}]. \quad \square$$

ii) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) \leq 5 \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1 \geq \frac{1}{32} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2>1 \\ x^2 \geq \frac{33}{32} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow S =]-\infty,-\sqrt{\tfrac{33}{32}}] \cup [\sqrt{\tfrac{33}{32}},+\infty[\quad \square$$

iii) $\log_2 x + \log_2 (x+1) \leq 1$

$$\log_2 [\underbrace{x \cdot (x+1)}] \leq \log_2 2 \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \\ x^2 + x \leq 2 \end{cases}$$

$S =]0, 1]$ ■

NOTAZIONE : $\log_e x = \log x$ $(= \ln x)$