

Peanuts 9: o-piccoli e teoremi sulle funzioni continue (12 - 16 novembre 2018)

1. Sia $a \in \mathbb{R}$. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una qualunque funzione continua con $f(0) = 4$ e $f(1) = 1$, allora l'equazione $f(x) = a$ ha una soluzione nell'intervallo $]0, 1[$ per

☐ $a = 0$

☐ $a = 1$

☐ $a = 2$

☐ $a = 4$

2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \arctan x + x$. Quante delle affermazioni

(i) la funzione f ammette massimo sull'intervallo $[0, 1]$

(ii) l'immagine dell'intervallo $[0, 1]$ tramite f è un intervallo chiuso e limitato

(iii) l'equazione $f(x) = 1$ ammette una soluzione reale

sono vere?

☐ 0

☐ 1

☐ 2

☐ 3

3. Sia $f(x) = \begin{cases} \alpha^2(1 - \sin x) & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$ Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione f verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass sull'intervallo $[-2, 2]$?

☐ $\alpha = \pm 1$

☐ $\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

☐ $\alpha \in \mathbb{R}$

☐ $\alpha = \sqrt{2}$

4. Sia $f(x) = (e^x)^2 - 1$. Quale delle seguenti uguaglianze è vera per $x \rightarrow 0$?

☐ $f(x) = 2x + 2x^2 + o(x^3)$

☐ $f(x) = x^2 + o(x^2)$

☐ $f(x) = 2x + o(x)$

☐ $f(x) = x^2 + o(x^3)$

5. Sia $f(x) = \frac{1}{1+2x}$. Per $x \rightarrow 0$ si ha

☐ $f(x) = 1 + o(x)$

☐ $f(x) = 1 - 2x + o(x)$

☐ $f(x) = 1 + 2x + o(x)$

☐ $f(x) = 1 - 2x + o(x^2)$

6. Per quale delle seguenti funzioni la retta di equazione $x = 0$ non è un asintoto verticale?

☐ $f(x) = \frac{1}{\log(1+x)}$

☐ $f(x) = \log |x|$

☐ $f(x) = \frac{1}{\log |x|}$

☐ $f(x) = \frac{1}{|x|}$

7. Quali delle implicazioni

- (i) $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow +\infty \implies f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow +\infty$
(ii) $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0^+ \implies f(x) = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0^+$

sono vere?

- ☐ a Nessuna
☐ b La prima
☐ c La seconda
☐ d Entrambe

8. Quale delle seguenti scritture non è corretta?

- ☐ a $\sin x^2 = o(1)$ per $x \rightarrow 0$
☐ b $\sin x^2 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$
☐ c $\sin x^2 = x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$
☐ d $\sin x^2 = o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$

9. Per $x \rightarrow 0$, quante delle funzioni

$$f(x) = (1 - \cos x) \sin x, \quad g(x) = (e^{2x} - 1) \sin \frac{x^2}{4}, \quad h(x) = x^2 \log\left(1 + \frac{\sin x}{2}\right), \quad k(x) = \tan \frac{x}{2} \arcsin x^2$$

hanno parte principale uguale a $\frac{x^3}{2}$?

- ☐ a 1
☐ b 2
☐ c 3
☐ d 4

10. La funzione $f(x) = \frac{x^2 + 3x^\alpha}{x^2 + \arctan x + 1}$ ammette un asintoto obliquo per

- ☐ a $\alpha = 0$
☐ b $\alpha = 1$
☐ c $\alpha = 2$
☐ d $\alpha = 3$

11. La funzione $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2x + 1}$ ha come asintoto obliquo la retta di equazione

- ☐ a $y = \frac{x}{2} + \frac{5}{4}$
☐ b $y = \frac{x}{2} - \frac{5}{4}$
☐ c $y = \frac{x}{2}$
☐ d $x = -\frac{1}{2}$

12. Quale delle seguenti funzioni ha un asintoto verticale?

- ☐ a $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
☐ b $f(x) = \frac{x}{\arctan x}$
☐ c $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$
☐ d $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$