

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione  
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni  
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa  
**ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1**  
 a.a. 2018-2019 - Trento, 10 gennaio 2019

FILA (A) 21)  $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| < 1\} = ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[ \setminus \{0\}$ . Infatti  $|x^2 - 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x^2 - 1 < 1$   
 $\Leftrightarrow 0 < x^2 < 2 \Leftrightarrow x \in ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[ \setminus \{0\}$ .

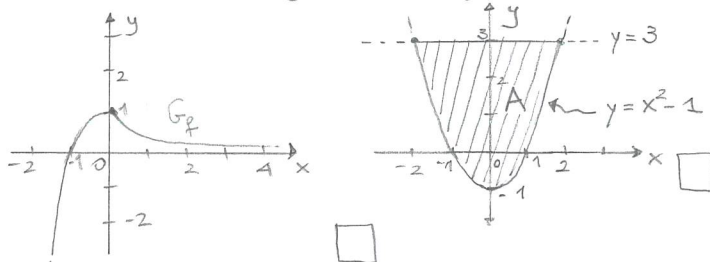
Quindi  $\inf A = -\sqrt{2}$ ,  $\sup A = \sqrt{2}$ . □

22)  $z = \frac{3i}{2-i}$   $\frac{3i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{6i - 3}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$  forma algebrica di  $z$ . □

23)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 3\}$ . Oss. che  $x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

24)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1+x^3 & \text{se } x < 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

$f(\mathbb{R}) = ]-\infty, 1]$ . □



25)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + e^x$ . Ora  $2x + e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ; inoltre  $f'(x) = 2 + e^x$ .

Quindi  $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$ . □

26)  $f(x) = e^{2x} - 2x$ . Ricordando che  $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$  per  $t \rightarrow 0$ ,

si ha che  $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3)$  per  $x \rightarrow 0$ . Quindi, per  $x \rightarrow 0$ ,

$f(x) = e^{2x} - 2x = 1 + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$ . Il polinomio di Taylor di ordine 3,

centrato in  $x_0 = 0$ , ricercato è  $P_3(x) = 1 + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$ . □

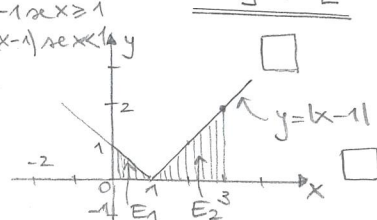
27)  $F(x) = \int_0^x (e^{-t} - 1) dt$ . Il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2}$  si presenta nella forma indeterminata

$\left[\frac{0}{0}\right]$ . Oss. che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{2x} \stackrel{\text{F.T.C.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-2} \cdot \underbrace{\left(\frac{e^{-x} - 1}{-x}\right)}_{x \rightarrow 0 \rightarrow 1} = -\frac{1}{2}$ . Dal teorema

di de L'Hôpital segue che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$ . □

28)  $\sum_{n=0}^{+\infty} (2x-1)^n$  è convergente  $\Leftrightarrow |2x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Leftrightarrow x \in ]0, 1[$ . □

29)  $\int_0^3 |x-1| dx = \text{area } E_1 + \text{area } E_2 = \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} = \frac{5}{2}$ . □

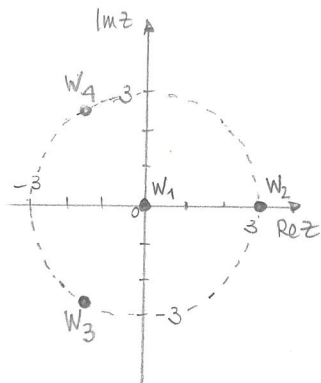


30)  $y'' = x+1 \Leftrightarrow y' = \frac{x^2}{2} + x + c_1 \Leftrightarrow y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$ .

L'insieme delle soluzioni dell'eq. diff. è  $\{y(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ . ■

b) i) Abbiamo l'eq.  $w^2 - 3\bar{w} = 0$ . Per risolvere tale eq. poniamo  $w = x + iy$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$  da determinare imponendo che risolva l'eq. data. Si ha

$$\begin{aligned} w^2 - 3\bar{w} = 0 &\Leftrightarrow (x + iy)^2 - 3(x - iy) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2xyi - y^2 - 3x + 3yi = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x - y^2 + i(2xy + 3y) = 0 \quad (= 0 + i0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - y^2 = 0 \\ 2xy + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - y^2 = 0 \\ y(2x + 3) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x^2 - 3x - y^2 = 0 \\ 2x + 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 3) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y^2 = \frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{27}{4} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$



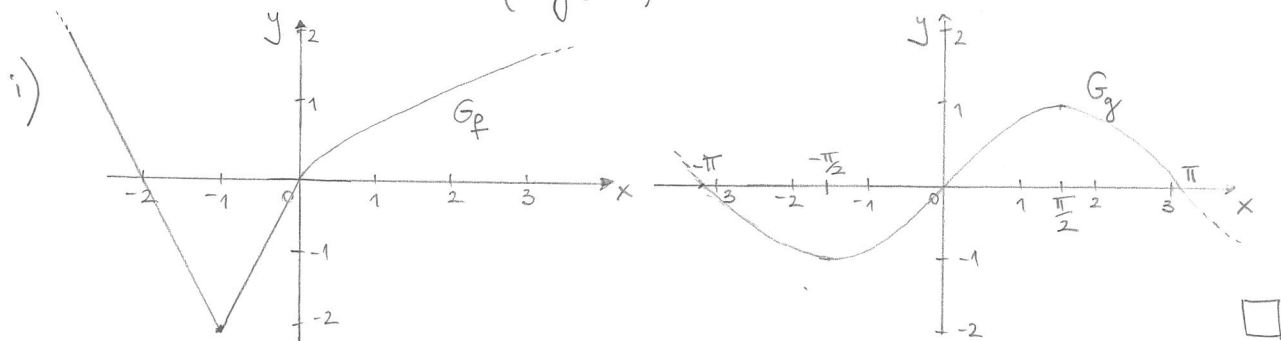
Risultano allora come soluzioni  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = 3$ ,  $w_3 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ,  $w_4 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ . Osserviamo che  $|w_2| = |w_3| = |w_4| = 3$ , mentre  $|w_1| = 0$ .  $\square$

ii) Osserviamo che l'eq.  $z^3 = 27$  si scrive equival. come  $z^3 = 27(\cos 0 + i \sin 0)$ .

Le soluzioni risultano allora  $z_k = \sqrt[3]{27} \left( \cos \left( \frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right)$  con  $k = 0, 1, 2$ , ossia  $z_0 = 3$ ,  $z_1 = 3 \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$ ,  $z_2 = 3 \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$ .  $\square$

iii) Notiamo che l'insieme delle soluzioni di b) coincide con l'insieme delle soluzioni di a) tranne che per  $w_1 = 0$ .  $\blacksquare$

b2)  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = \begin{cases} 2|x+1| - 2 & \text{se } x \leq 0 \\ \log(1+x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$   $g(x) = \sin x$ .



ii)  $f$  non è iniettiva: basta prendere  $x_1 = -2 \neq x_2 = 0$  e  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ .

$f$  non è suriettiva: basta osservare che  $f(\mathbb{R}) = [-2, +\infty[ \subsetneq \mathbb{R}$ .  $\square$

iii) La funzione  $f$  è continua in tutti i punti di  $[-1, 1]$  escluso al

più lo zero. Essendo  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2|x+1|-2) = 0 = f(0)$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(1+x) = \log 1 = 0$ , la funzione è continua anche in  $x=0$ . Possiamo allora asserire che  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.  $\square$

iv)  $(f \circ g)(x)$  è ben definita  $\forall x \in \mathbb{R}$ , poiché  $g(\mathbb{R}) = [-1, 1] \subset \text{dom } f = \mathbb{R}$ .  
Abbiamo  $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2|g(x)+1|-2 & \text{se } g(x) \leq 0 \\ \log(1+g(x)) & \text{se } g(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2|\sin x + 1| - 2 & \text{se } \sin x \leq 0 \\ \log(1+\sin x) & \text{se } \sin x > 0 \end{cases}$   
 $= \begin{cases} 2|\sin x + 1| - 2 & \text{se } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi] \\ \log(1+\sin x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi] \end{cases}$

b3)  $f(x) = \frac{x|x|+3}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{-x^2+3}{-x+1} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x^2+3}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

i) •  $\text{dom } f = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ .

• segno di  $f$

$x|x|+3 = \begin{cases} -x^2+3 & \text{se } x < 0 \\ x^2+3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

$|x|+1$

$f(x)$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2+3}{-x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2(1-\frac{3}{x^2})}{-x(1-\frac{1}{x})} = -\infty$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1+\frac{3}{x^2})}{x(1+\frac{1}{x})} = +\infty$ .

• Notiamo che  $f(x) = \frac{-x^2+3}{-x+1} = \frac{-x^2+1+2}{-x+1} = \frac{-x^2+1}{-x+1} + \frac{2}{-x+1}$   
 $= \frac{(-x+1)(x+1)}{-x+1} + \frac{2}{-x+1} = x+1 + \frac{2}{-x+1}$  per  $x < 0$ ;

a questo risultato si può facilmente giungere anche eseguendola divisione di polinomi  $-x^2+3 : -x+1$ . Da  $f(x) = x+1 + \frac{2}{-x+1}$ ,  $x < 0$  si deduce facilmente che  $y = x+1$  è asintoto obliquo per  $f$ ,  
per  $x \rightarrow -\infty$  (ovviamente si può giungere a questo risultato svolgendo gli abituali conti per la determinazione di un asintoto obliquo).

Analogamente si ha  $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{x^2-1+4}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{4}{x+1}$ , ossia

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{4}{x+1} = x-1 + \frac{4}{x+1} \quad \text{per } x \geq 0.$$

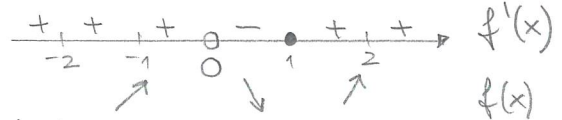
Risulta che  $y = x-1$  è asintoto obliquo per  $f$ , per  $x \rightarrow +\infty$ .

- $f$  è continua su tutto  $\mathbb{R}$  essendo prodotto, somma, rapporto di funzioni continue su  $\mathbb{R}$  e il denominatore non si annulla mai.
- $f$  è chiaramente derivabile in ogni pt.  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e m'ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 3}{(x+1)^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Per studiare la derivabilità in  $x=0$  calcoliamo il limite per  $x \rightarrow 0$  della funzione  $f'(x)$ . Essendo  $f$  continua in  $x=0$ , per un collaudo del teorema di de l'Hôpital, m'ha  $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 3$  e  $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -3$ . Risulta quindi che  $(0, f(0)) = (0, 3)$  è un pt. angoloso per  $f$ .

- Notiamo che  $f'(x) > 0 \quad \forall x < 0$ , mentre  $f'(x) = 0$  per  $x > 0 \iff x = 1$  (pt. critico per  $f$ ) e



Risulta che  $x=1$  è un pt. di min. loc. stretto per  $f$ ; inoltre  $f(1) = 2$ .

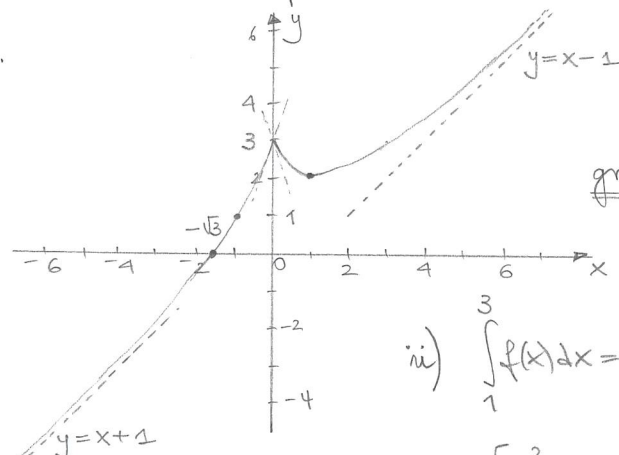


grafico qualitativo di  $f$



$$\begin{aligned} \text{ii) } \int_1^3 f(x) dx &= \int_1^3 \left( x-1 + \frac{4}{x+1} \right) dx = \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} - x + 4 \log(x+1) \right]_1^3 = \\ &= \left( \frac{9}{2} - 3 + 4 \log 4 \right) - \left( \frac{1}{2} - 1 + 4 \log 2 \right) \\ &= 2 + 4 \log 2 = \underline{2 + \log 16}. \end{aligned}$$



iii)

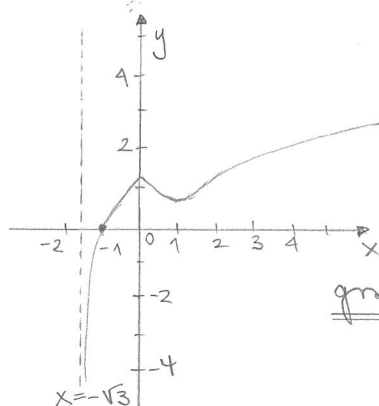


grafico qualitativo di  $g(x) = \log f(x)$ .



b4)  $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{(e^{x^x}-1)(1+x^2)} dx$   $f(x) : ]0,1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , continua,  $f(x) > 0$ .  
 Notiamo che (ricordate che  $e^t = 1 + t + o(t)$  per  $t \rightarrow 0$ )  
 per  $x \rightarrow 0^+$   $f(x) \sim \frac{\sqrt[3]{x}}{x^x} = \frac{1}{x^{\alpha-1/3}}$ .

Poiché  $\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1/3}} dx < +\infty \iff \alpha - \frac{1}{3} < 1 \iff \alpha < \frac{4}{3}$ , per il criterio del confronto asintotico anche  $\int_0^1 f(x) dx < +\infty$  se e solo se  $\alpha < \frac{4}{3}$ . ■

b5) Oss. che  $y' = \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{a(x)} y + \underbrace{(x \sin x)}_{b(x)}$  è un'eq. diff. lineare del primo ordine con  $a(x) = \frac{1}{x}$  continua su  $]0, +\infty[$   
 $b(x) = x \sin x$  " " .

Applicando la formula risolutiva si ottiene su  $]0, +\infty[$

$$y(x) = e^{A(x)} \left( c + \int x \sin x e^{-A(x)} dx \right), \quad c \in \mathbb{R},$$

dove  $A(x) = \int \frac{1}{x} dx = \log x$ ; quindi

$$y(x) = e^{\log x} \left( c + \int x \sin x e^{-\log x} dx \right)$$

$$= x \left( c + \int x \sin x e^{\log \frac{1}{x}} dx \right)$$

$$= x \left( c + \int x \sin x \frac{1}{x} dx \right)$$

$$= x \left( c + \int \sin x dx \right),$$

ossia

$$y(x) = x(c - \cos x), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo  $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ , si ottiene  $1 = \frac{\pi}{2}c$ , ossia  $c = \frac{2}{\pi}$ . In definitiva, la soluzione del pbm. di Cauchy risulta essere  $\underline{y(x) = \frac{2}{\pi}x - x \cos x}$ , su  $]0, +\infty[$ . ■

b6) i)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice derivabile in  $x_0 = 1$  se esiste finito  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ . □

ii) Provate che l'eq.  $x^2 = 2$  non ha soluzione in  $\mathbb{Q}$ , ossia che  $\sqrt{2}$  è irrazionale. ■

FILA (B) 21)  $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < 2\} = ]-2, 2[ \setminus \{0\}$ . Infatti  $|x^2 - 2| < 2 \Leftrightarrow -2 < x^2 - 2 < 2$   
 $\Leftrightarrow 0 < x^2 < 4 \Leftrightarrow x \in ]-2, 2[ \setminus \{0\}$ .

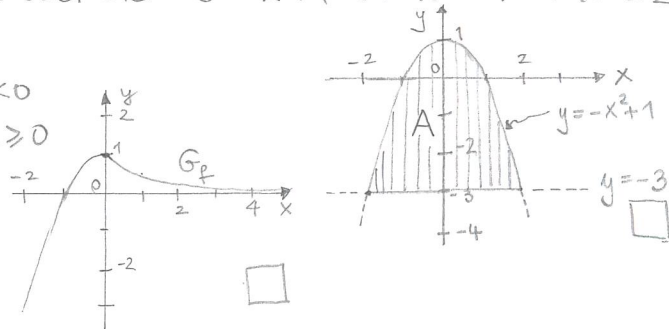
Quindi  $\inf A = -2$ ,  $\sup A = 2$ . □

22)  $z = \frac{4i}{1+i} \quad \frac{4i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{4i + 4}{2} = \underline{2 + 2i}$  forma algebrica di  $z$  □

23)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq y \leq -x^2 + 1\}$ . Oss. che  $-3 = -x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

24)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{se } x < 0 \\ 2^{-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

$f(\mathbb{R}) = ]-\infty, 1]$ .



25)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 2e^x$ . On  $x + 2e^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ; inoltre  $f'(x) = 1 + 2e^x$ .

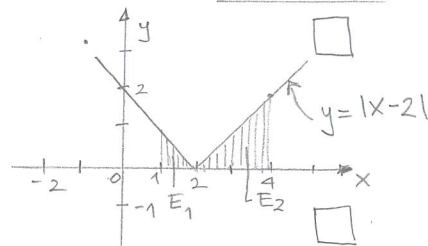
Quindi  $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$ . □

26)  $f(x) = e^{-x} - x$ . Ricordando che  $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$  per  $t \rightarrow 0$  e  
 mi ha che  $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$  per  $x \rightarrow 0$ . Quindi, per  $x \rightarrow 0$ ,  
 $f(x) = e^{-x} - x = 1 - 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ . Il pd. di Taylor di ordine 3, centrato  
 in  $x_0 = 0$ , cercato è  $P_3(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ . □

27)  $F(x) = \int_0^x (e^{3t} - 1) dt$ . Il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2}$  si presenta nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ . Oss. che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{2x} \stackrel{\text{TFC}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \cdot \underbrace{\left( \frac{e^{3x} - 1}{3x} \right)}_{\rightarrow 1} = \frac{3}{2}$ . Dal  
 teorema di de l'Hôpital segue che  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2} = \frac{3}{2}$ . □

28)  $\sum_{n=0}^{+\infty} (3\beta - 1)^n$  è convergente  $\Leftrightarrow |3\beta - 1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 3\beta - 1 < 1 \Leftrightarrow \beta \in ]0, \frac{2}{3}[$ . □

29)  $\int_1^4 |x-2| dx = \text{area } E_1 + \text{area } E_2 = \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$ .  
 si può anche apprezzare l'integrale usando  
 $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{se } x < 2 \end{cases}$



30)  $y'' = x - 1 \Leftrightarrow y' = \frac{x^2}{2} - x + c_1 \Leftrightarrow y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$ .

L'insieme delle soluzioni dell'eq. diff. è  $\{y(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ . ■

b1) i) Abbiamo l'eq.  $w^2 - 2\bar{w} = 0$ . Per risolvere tale eq. poniamo  $w = x + iy$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$  da determinare imponendo che risolve l'eq. data. Si ha

$$w^2 - 2\bar{w} = 0 \iff (x + iy)^2 - 2(x - iy) = 0$$

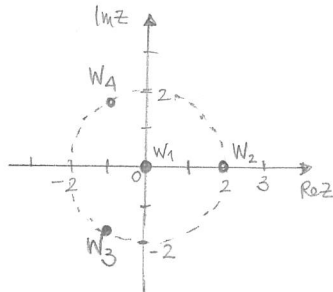
$$\iff x^2 + 2xyi - y^2 - 2x + 2iy = 0$$

$$\iff x^2 - 2x - y^2 + i(2xy + 2y) = 0 \quad (= 0 + i0)$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - 2x - y^2 = 0 \\ xy + y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2x - y^2 = 0 \\ y(x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - 2x - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - y^2 = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(x-2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y^2 = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$



Risultano allora come soluzioni  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = 2$ ,  $w_3 = -1 - \sqrt{3}i$ ,  $w_4 = -1 + \sqrt{3}i$ .

Osserviamo che  $|w_2| = |w_3| = |w_4| = 2$ , mentre  $|w_1| = 0$ .  $\square$

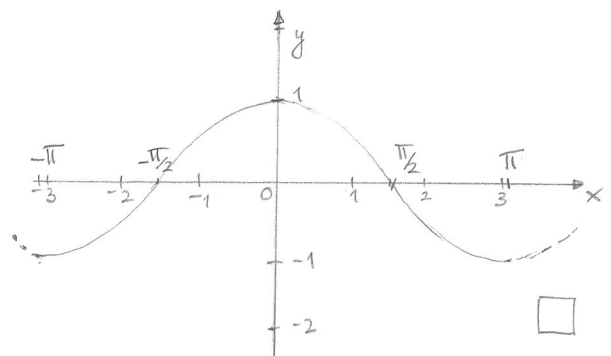
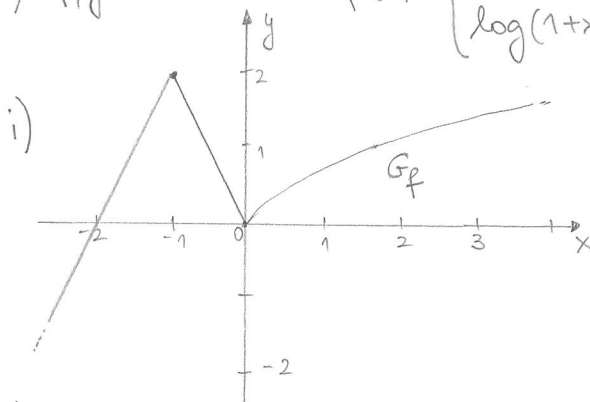
ii) Osserviamo che l'eq.  $z^3 = 8$  si scrive equiv. come  $z^3 = 8(\cos 0 + i \sin 0)$ .

Le soluzioni risultano allora  $z_k = \sqrt[3]{8} \left( \cos\left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right)$

con  $k = 0, 1, 2$ , ossia  $z_0 = 2$ ,  $z_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ,  $z_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ .  $\square$

iii) Notiamo che l'insieme delle soluzioni di b) coincide con l'insieme delle soluzioni di a) tranne che per  $w_1 = 0$ .  $\blacksquare$

b2)  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = \begin{cases} -2k+1 & \text{se } x \leq 0 \\ \log(1+x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$   $g(x) = \cos x$ .



ii)  $f$  non è iniettiva: basta prendere  $x_1 = -2 \neq x_2 = 0$  e  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ .

$f$  è suriettiva, poiché  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .  $\square$

iii) La funzione  $f$  è continua in tutti i punti di  $[-1, 1]$  escluso al

più lo zero. Essendo  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2|x+1|+2) = 0 = f(0)$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(1+x) = \log 1 = 0$ , la funzione è continua anche in  $x=0$ . Possiamo allora asserire che  $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass.  $\square$

iv)  $(f \circ g)(x)$  è ben definita  $\forall x \in \mathbb{R}$ , poiché  $g(\mathbb{R}) = [-1,1] \subset \text{dom } f = \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{Abbiamo } (f \circ g)(x) &= \begin{cases} -2|g(x)+1|+2 & \text{se } g(x) \leq 0 \\ \log(1+g(x)) & \text{se } g(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} -2|\cos x + 1| + 2 & \text{se } \cos x \leq 0 \\ \log(1+\cos x) & \text{se } \cos x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -2|\cos x + 1| + 2 & \text{se } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right] \\ \log(1+\cos x) & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right] \end{cases} \end{aligned}$$

$$b3) \quad f(x) = \frac{x|x|-3}{|x|+1} = \begin{cases} \frac{-x^2-3}{-x+1} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x^2-3}{x+1} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

i) •  $\text{dom } f = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$ .

• segue di  $f$

$$x|x|-3 = \begin{cases} -x^2-3 & \text{se } x < 0 \\ x^2-3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$|x|+1$$

$$f(x)$$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2-3}{-x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2(1+\frac{3}{x^2})}{-x(1-\frac{1}{x})} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(1-\frac{3}{x^2})}{x(1+\frac{1}{x})} = +\infty$

• Notiamo che  $f(x) = \frac{-x^2-3}{-x+1} = \frac{-x^2+1-4}{-x+1} = \frac{-x^2+1}{-x+1} - \frac{4}{-x+1}$   
 $= \frac{(-x+1)(x+1)}{-x+1} - \frac{4}{-x+1} = x+1 - \frac{4}{-x+1}$  per  $x < 0$ ;

a questo risultato si può facilmente giungere anche eseguendo la divisione di polinomi  $-x^2-3 : -x+1$ . Da  $f(x) = x+1 - \frac{4}{-x+1}$ ,  $x < 0$  si deduce facilmente che  $y = x+1$  è asintoto obliquo per  $f$ ,

per  $x \rightarrow -\infty$  (ovviamente si può giungere a questo risultato svolgendo gli abituali conti per la determinazione di un asintoto obliquo).

Analogamente si ha  $f(x) = \frac{x^2-3}{x+1} = \frac{x^2-1-2}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} - \frac{2}{x+1}$ , ossia

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} - \frac{2}{x+1} = x-1 - \frac{2}{x+1} \quad \text{per } x \geq 0.$$

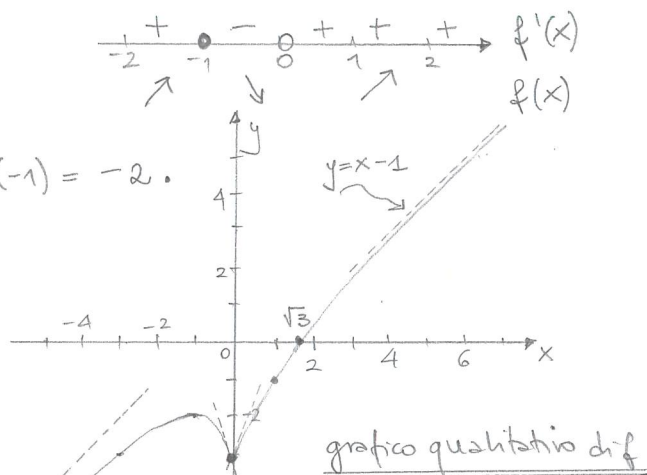
Risulta che  $y = x-1$  è asintoto obliquo per  $f$ , per  $x \rightarrow +\infty$ .

- $f$  è continua su tutto  $\mathbb{R}$  essendo prodotto, somma, rapporto di funzioni continue su  $\mathbb{R}$  e il denominatore non si annulla mai.
- $f$  è chiaramente derivabile in ogni pt.  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e mi ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{(-x+1)^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Per studiare la derivabilità in  $x=0$  calcoliamo il limite per  $x \rightarrow 0$  della funzione  $f'(x)$ . Essendo  $f$  continua in  $x=0$ , per un corollario del teorema di de l'Hôpital, mi ha  $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -3$  e  $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 3$ . Risulta quindi che  $(0, f(0)) = (0, -3)$  è un pt. angoloso per  $f$ .

- Notiamo che  $f'(x) > 0 \quad \forall x > 0$ , mentre  $f'(x) = 0$  per  $x < 0 \Leftrightarrow x = -1$  (pt. critico per  $f$ ) e  
Risulta che  $x = -1$  è un pt. di  
max. loc. stretto per  $f$ ; inoltre  $f(-1) = -2$ .



$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \int_1^3 f(x) dx &= \int_1^3 \left( x-1 - \frac{2}{x+1} \right) dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} - x - 2 \log(x+1) \right]_1^3 \\ &= \left( \frac{9}{2} - 3 - 2 \log 4 \right) - \left( \frac{1}{2} - 1 - 2 \log 2 \right) \\ &= 2 - 2 \log 4 + 2 \log 2 \\ &= \underline{\underline{2 - 2 \log 2.}} \end{aligned}$$

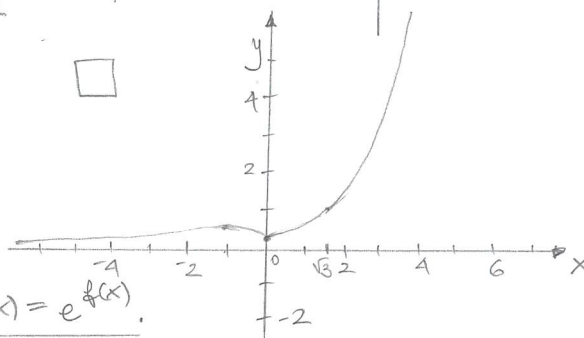


grafico qualitativo di  $g(x) = e^{f(x)}$ .

iii)

$$b4) \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2) \log(1+x^2)} dx$$

$f(x): ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , continua,  $f(x) > 0$ .

Notiamo che (ricordare che  $\log(1+t) = t + o(t)$  per  $t \rightarrow 0$ )

$$\text{per } x \rightarrow 0^+ \quad f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{2-\frac{1}{2}}}$$

Poiché  $\int_0^1 \frac{1}{x^{2-\frac{1}{2}}} dx < +\infty \Leftrightarrow 2-\frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow 2 < \frac{3}{2}$ , per il criterio del confronto asintotico anche  $\int_0^1 f(x) dx < +\infty$  se e solo se  $\underline{2 < \frac{3}{2}}$ . ■

b5) Oss. che  $y' = \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{a(x)} y + \underbrace{(x \cos x)}_{b(x)}$  è un'eq. diff. lineare del primo ordine con  $a(x) = \frac{1}{x}$  continua in  $]0, +\infty[$   
 $b(x) = x \cos x$  " .

Applicando la formula risolutiva si ottiene in  $]0, +\infty[$

$$y(x) = e^{A(x)} \left( c + \int x \cos x e^{-A(x)} dx \right), \quad c \in \mathbb{R},$$

dove  $A(x) = \int \frac{1}{x} dx = \log x$ ; quindi

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\log x} \left( c + \int x \cos x e^{-\log x} dx \right) \\ &= x \left( c + \int x \cos x e^{\log \frac{1}{x}} dx \right) \\ &= x \left( c + \int x (\cos x) \frac{1}{x} dx \right) \\ &= x \left( c + \int \cos x dx \right), \end{aligned}$$

ossia

$$y(x) = x(c + \sin x), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo  $y(\pi) = 1$ , si ottiene  $1 = \pi c$ , ossia  $c = \frac{1}{\pi}$ . In definitiva, la soluzione del pbn. di Cauchy risulta essere

$$\underline{y(x) = \frac{1}{\pi} x + x \sin x}, \quad \text{in } ]0, +\infty[. \quad \text{■}$$

b6) i)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice derivabile in  $x_0 = 2$  se esiste finito  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ . □

ii) Provate che l'eq.  $x^2 = 2$  non ha soluzione in  $\mathbb{Q}$ , ossia che  $\sqrt{2}$  è irrazionale. ■