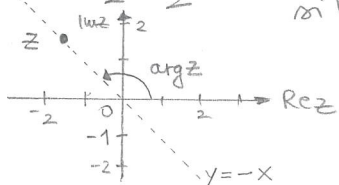


Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2018-2019 - Trento, 31 gennaio 2019

FILA A

21) $A = \{x_n = -\frac{1}{n^2+2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 0\} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \dots\}$. Risulta $\inf A = -\frac{1}{2}; \sup A = 0$.

22) $z = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$. Basta osservare la sua rappresentazione grafica:



$\arg z = \frac{3\pi}{4}$

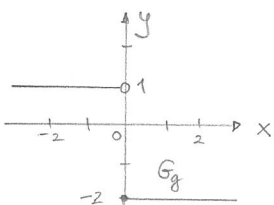
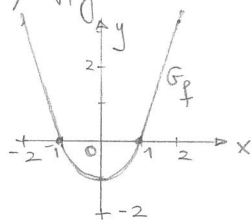
(si può anche scrivere $z = \frac{3}{\sqrt{2}}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3}{\sqrt{2}}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$ da cui $\arg z = \frac{3\pi}{4}$).

23) $\log(2-x) < 0 \Leftrightarrow \log(2-x) < \log 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 0 \\ 2-x < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in]1, 2[$.

24) $4 \arctan x = k$ ha soluzione in $\mathbb{R} \Leftrightarrow \arctan x = \frac{k}{4}$ ha soluzione in $\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{k}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (ricordare che $\text{Im}(\arctan x) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Ne segue $k \in]-2\pi, 2\pi[$.

25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x^3 - \sqrt{x+1}}{e^{-x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\log x^3}{\sqrt{x+1}} - 1}{\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} + 1} = \frac{-1}{1} = -1$.
 (Note: $\log x^3 \ll \sqrt{x+1}$ per $x \rightarrow +\infty$)

26) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.



$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) < 0 \\ -2 & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}$
 $= \begin{cases} 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ -2 & \text{se } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{cases}$.

27) $f(x) = \log(1+x+x^2)$. Ricordiamo che $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$.

Poiché $t = x+x^2 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$, si ha $f(x) = (x+x^2) - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \frac{1}{3}(x+x^2)^3 + o((x+x^2)^3)$ per $x \rightarrow 0$, ossia $f(x) = x+x^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$. Il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della f risulta quindi $P_3(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3$.

28) $f(x) = x^2 - 2x^3$ $f'(x) = 2 - 6x^2$; $f''(x) = 2 - 12x$; $f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{6}$. Quindi f è concava nell'intervallo $[\frac{1}{6}, +\infty[$.

29) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 n!} x^n$: abbiamo $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2 n!}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$; quindi $r = 2$.

30) $\int 2x \log x dx = 2 \int x \log x dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right] = 2 \left[\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C \right] = x^2 \log x - \frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$.

b2) $f:]-1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

i) f è biiettiva $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{a) } \forall y \in]0, +\infty[, \exists x \in]-1, +\infty[: f(x) = y \text{ (} f \text{ suriettiva)} \\ \text{b) Tale } x \text{ è unica (} f \text{ è iniettiva).} \end{cases}$

Fissiamo $y > 0$ arbitrario. Abbiamo $\frac{1}{x+1} = y \Leftrightarrow 1 = y(x+1) \Leftrightarrow 1-y = yx$.

$\Rightarrow x = \frac{1}{y} - 1$. Da questo segue subito che $x \in]-1, +\infty[$ e la sua unicità (ossia a) e b)).

Rimane così definita la funzione inversa $f^{-1}:]0, +\infty[\rightarrow]-1, +\infty[$ e scriviamo

$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 1$, $\forall x > 0$.

ii)

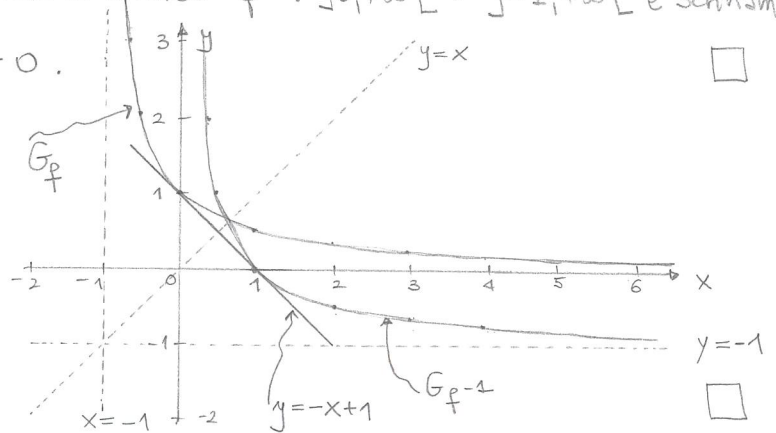
iii) $y = f(0) + f'(0)(x-0)$

$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

$f'(0) = -1$

$\Rightarrow y = 1 - (x-0)$

$y = -x + 1$ eq. retta tg al grafico di f nel pt $(0, 1)$.



$(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$y = f^{-1}(1) + (f^{-1})'(1)(x-1) \Rightarrow y = 0 - (x-1) \Rightarrow y = -x + 1$ eq. retta tg. al grafico di f nel pt. $(1, 0)$.

$(f^{-1})'(1) = -1$ Oss. Le due rette hanno la stessa eq.!

b3) i) $f(x) = x^3 e^{-|x-1|-x} = \begin{cases} x^3 e^{-(x-1)-x} & \text{se } x \geq 1 \\ x^3 e^{-(-x+1)-x} & \text{se } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x^3 e^{-2x+1} & \text{se } x \geq 1 \\ x^3 e^{-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• segno di f = segno di x^3

• comportamento agli estremi del dominio : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{2x-1}} = 0$

$\Rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua su $\mathbb{R}$: composizione, somma, prodotto di funzioni continue

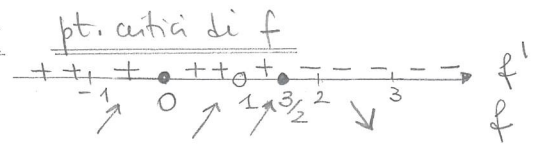
• f è sicuramente derivabile in ogni pt. escluso al più il pt. $x = 1$, con

$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 e^{-2x+1} + x^3 \cdot (-2) e^{-2x+1} & \text{se } x > 1 \\ \frac{3x^2}{e} & \text{se } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 (3-2x) e^{-2x+1} & \text{se } x > 1 \\ \frac{3x^2}{e} & \text{se } x < 1 \end{cases}$

* Va bene ovviamente se si prova f iniettiva usando la definizione o osservando che f è ohett, decrescente (con i conti oppure "leggendo dal grafico"), e f suriettiva osservando che $f(]-1, +\infty[) =]0, +\infty[$ (con i conti oppure "leggendo dal grafico").

Essendo f continua in $x=1$, dal collaio del teorema di de L'Hôpital
 si ha $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2}{e} = \frac{3}{e}$ e $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2(3-2x)e^{-2x+1} = \frac{1}{e}$. Risultato che la funzione f ha un pt.
angolare in $x=1$.

Infine $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0, x=\frac{3}{2}$

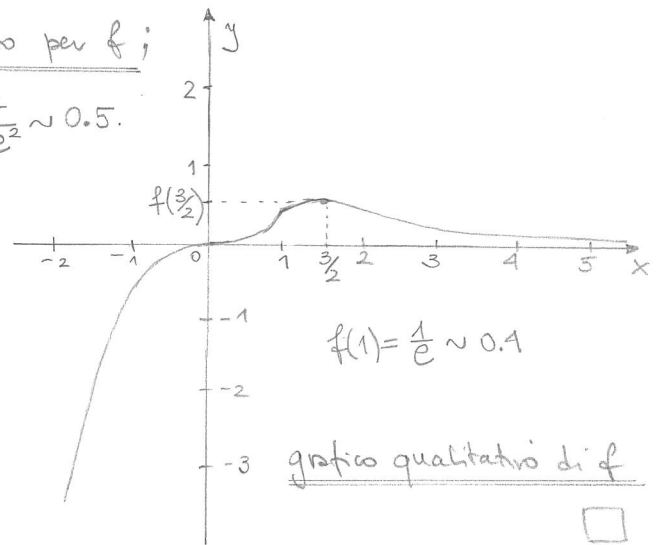


Risultato che $x=0$ è un pt. con angolare

ne di max, ne di minimo; inoltre $f(0)=0$.

$x=\frac{3}{2}$ è un pt. di max loc. stretto per f ;

$$\text{inoltre } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{8} e^{-3+1} = \frac{27}{8e^2} \sim 0.5.$$



ii) $F(x)$ è derivabile su $[1, +\infty[$

(somma, composizione e prodotto di
 funzioni derivabili). Basta verificare
 che $F'(x) = f(x)$ per $x \geq 1$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[\left(-\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} \right) e^{-2x+1} \right]' = \\ &= \left(-\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} \right) e^{-2x+1} + \left(-\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} \right) (-2) e^{-2x+1} = x^3 e^{-2x+1} = f(x). \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M f(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} [F(M) - F(1)] = -F(1) = \frac{19}{8} e^{-1} = \frac{19}{8e}.$$

generalità degli infiniti

b4) i) Notiamo che $a_n = (5n^2+n) \sin\left(\frac{1}{n^2+4n^\alpha}\right) = \frac{(5n^2+n)}{n^2+4n^\alpha} \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2+4n^\alpha}\right)$

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (5n^2+n) \sin\left(\frac{1}{n^2+4n^\alpha}\right) = \begin{cases} 5 & \text{se } \alpha < 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

ii) Abbiamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (5n^2+n) \sin\left(\frac{1}{n^2+4n^\alpha}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, con $a_n > 0 \forall n \geq 1$.

Quindi la serie converge o diverge positivamente.

Se $\alpha \leq 2$, la serie data diverge positiv., poiché non è soddisfatta

La condizione necessaria per la convergenza di una serie, ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \quad (\text{vedi i}).$$

Se $\alpha > 2$, allora $a_n = (5n^2 + n) \sin\left(\frac{1}{n^2 + 4n^\alpha}\right) \sim 5n^2 \cdot \frac{1}{4n^\alpha}$ per $n \rightarrow +\infty$
 $= \frac{5}{4n^{\alpha-2}}.$

Poich  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-2}} < +\infty \iff \alpha-2 > 1$, ossia $\alpha > 3$, per il criterio del confronto asintotico la serie data, per $\alpha > 2$,   convergente $\iff \alpha > 3$. In definitiva, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$   divergente positv. $\forall \alpha \leq 3$ e convergente $\forall \alpha > 3$. ■

b5) i) L'eq. caratteristica associata a $y'' - 4y = 0$   $z^2 - 4 = 0$, le cui soluzioni sono $z_{1/2} = \pm 2$. L'integrale generale di $y'' - 4y = 0$   quindi,

$y_0(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Poich  $z_{1/2} \neq 1$, cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. data (*) nella forma $\bar{y}(x) = h e^x$ con $h \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che $\bar{y}(x)$ risolva (*). Poich  $\bar{y}'(x) = \bar{y}''(x) = h e^x$, $\bar{y}(x)$   soluz. di (*) $\iff h e^x - 4h e^x = 2e^x \iff -3h = 2 \iff h = -\frac{2}{3}$. L'insieme delle soluzioni dell'eq. diff. (*)   quindi dato dalle funzioni $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} - \frac{2}{3} e^x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

ii) $y(0) = 1 \iff 1 = c_1 + c_2 - \frac{2}{3}$, mentre $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0 \iff c_1 = 0$.

La soluzione di (*) soddisfacente $y(0) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$ risulta essere $y(x) = \frac{5}{3} e^{2x} - \frac{2}{3} e^x$, $x \in \mathbb{R}$. ■

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   continua in $x_0 = 1$ se $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$;

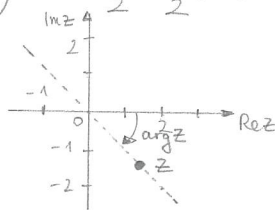
possiamo anche scrivere che f   continua in $x_0 = 1$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| < \delta.$$
 □

ii) Enunciate e provate la formula del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica. ■

FILA ③ a1) $A = \{x_n = -\frac{1}{n^2+3} : n \in \mathbb{N}, n \geq 0\} = \{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{7}, \dots\}$. Risulta $\inf A = -\frac{1}{3}$; $\sup A = 0$.

a2) $z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$. Basta osservare la sua rappresentazione grafica: $\square$



si ha $\arg z = -\frac{\pi}{4}$
(si può anche scrivere $z = \frac{3}{\sqrt{2}} (\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3}{\sqrt{2}} (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$
da cui $\arg z = -\frac{\pi}{4}$). $\square$

a3) $\log(-x+3) < 0 \Leftrightarrow \log(-x+3) < \log 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+3 > 0 \\ -x+3 < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in]2, 3[$ $\square$

a4) $6 \arctan x = k$ ha soluzioni in $\mathbb{R} \Leftrightarrow \arctan x = \frac{k}{6}$ ha soluzioni in $\mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \frac{k}{6} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (ricordare che $\text{Im}(\arctan x) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). Ne segue $k \in]-3\pi, 3\pi[$. $\square$

a5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} + 2 \log x^3}{(2^{-x}) + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{(1 + \frac{2 \log x^3}{\sqrt{x+2}})}{(\frac{2^{-x}}{\sqrt{x}} + 1)} = \frac{1}{1} = 1$.
gerarchia degli infiniti $\log x^3 \ll \sqrt{x+2}$ per $x \rightarrow +\infty$ $\square$

a6) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 2 & \text{se } f(x) < 0 \\ -1 & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}$
 $= \begin{cases} 2 & \text{se } -1 < x < 1 \\ -1 & \text{se } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \end{cases}$. $\square$

a7) $f(x) = \log(1+x-x^2)$. Ricordiamo che $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$.
Poichè $t = x - x^2 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$, si ha $f(x) = (x - x^2) - \frac{1}{2}(x - x^2)^2 + \frac{1}{3}(x - x^2)^3 + o((x - x^2)^3)$
per $x \rightarrow 0$, ossia $f(x) = x - x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$. Il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della f risulta quindi $P_3(x) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$. $\square$

a8) $f(x) = 6x^2 - x^3$ $f'(x) = 12x - 3x^2$; $f''(x) = 12 - 6x$; $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$. Quindi f è convessa sull'intervallo $]-\infty, 2]$. $\square$

a9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n3^n)^{1/r}} x^n$: abbiamo $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n3^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$; quindi $r=3$. $\square$

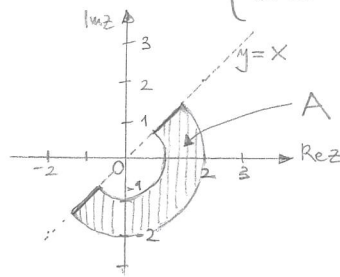
a10) $\int 4x \log x dx = 4 \int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\log x}_g dx \stackrel{\text{integr. per parti}}{=} 4 \left[\frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \right] = 4 \left[\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c \right] = 2x^2 \log x - x^2 + c, c \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

b1) i) Poniamo $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$. Allora

$$(*) \begin{cases} |z-1| \leq |z-i| \\ 1 \leq |z| \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(x-1) + iy| \leq |x + i(y-1)| \\ 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \\ 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq x^2 + y^2 - 2y + 1 \\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x \\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$



□

ii) $z_0 = \sqrt{3} + i \in A$:

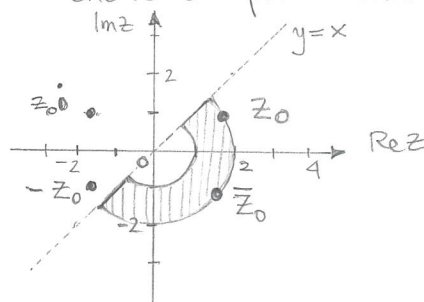
Infatti, posto $x = \sqrt{3}$, $y = 1$ si ha $y \leq x$; inoltre $|z_0| = \sqrt{4} = 2$. □

iii) $-z_0 \in A$? Ovviamente $|-z_0| = |z_0| = 2$; poiché $-z_0 = \underbrace{-\sqrt{3}}_x - \underbrace{1}_y i$ si ha $y > x$, per cui $-z_0 \notin A$.

$\bar{z}_0 \in A$? Si ha $|\bar{z}_0| = |z_0| = 2$; d'altra parte $\bar{z}_0 = \underbrace{\sqrt{3}}_x - \underbrace{1}_y i$. Essendo $y < x$, si ha $\bar{z}_0 \in A$.

$z_0 i \in A$? Ovviamente $|z_0 i| = |z_0| = 2$; inoltre $z_0 i = (\sqrt{3} + i)i = \underbrace{-1}_x + \underbrace{\sqrt{3}}_y i$. Essendo $y > x$, possiamo concludere che $z_0 i \notin A$.

In definitiva, l'unica affermazione vera è la seconda. A questa conclusione si può giungere anche semplicemente graficamente:



■

(*) Vedi anche OSS. fondo pag. 2. L'eq. $|z-1| = |z-i|$ è soddisfatta dagli $z \in \mathbb{C}$, che distano da 1 tanto quanto distano da i . Sono gli $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ t.c. $y = x$. La diseq. $|z-1| < |z-i|$ è soddisfatta dagli $z \in \mathbb{C}$, la cui distanza da 1 è minore di quella da i . Sono gli $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ t.c. $y < x$. Le diseq. $1 \leq |z| \leq 2$ sono soddisfatte dagli $z \in \mathbb{C}$ che hanno distanza dall'origine maggiore o uguale a 1 e minore o uguale a 2. □

b2) $f:]0, +\infty[\rightarrow]-1, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x} - 1$.

i) f è biiettiva $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a) \forall y \in]-1, +\infty[, \exists x \in]0, +\infty[: f(x) = y \text{ (} f \text{ suriettiva)} \\ b) \text{ Tale } x \text{ è unica (} f \text{ iniettiva).} \end{cases}$

Fissiamo $y > -1$ arbitrario. Abbiamo $\frac{1}{x} - 1 = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y+1}$. Da questo segue subito che $x \in]0, +\infty[$ e la sua unicità (ossia a) e b)). Rimane

così definita la funzione inversa $f^{-1}:]-1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ e scriviamo

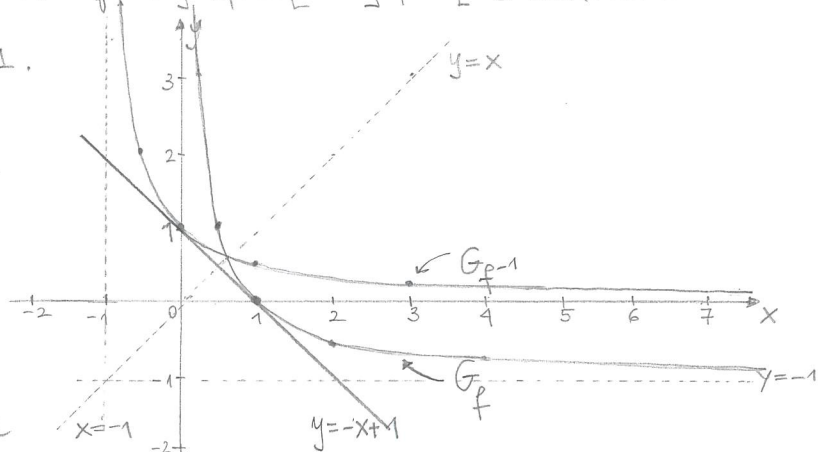
$f^{-1}(x) = \frac{1}{x+1}$, $\forall x > -1$.

ii)

iii) $y = f(1) + f'(1)(x-1)$

$\Rightarrow y = 0 - (x-1)$

$y = -x + 1$ eq. retta tg al grafico di f nel pt. $(1, 0)$.



$y = f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0)(x-0) \Rightarrow y = 1 - 1(x-0) \Rightarrow \underline{y = -x + 1}$ eq. retta tg. al grafico di f nel pt. $(0, 1)$

$(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

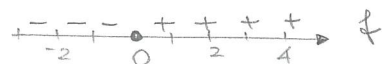
$(f^{-1})'(0) = -1$

oss. le due rette hanno la stessa eq.!

b3) i) $f(x) = x^3 e^{-|x+1|+x} = \begin{cases} x^3 e^{-(x+1)+x} & \text{se } x \geq -1 \\ x^3 e^{-(-x-1)+x} & \text{se } x < -1 \end{cases} = \begin{cases} x^3 e^{-1} & \text{se } x \geq -1 \\ x^3 e^{2x+1} & \text{se } x < -1 \end{cases}$

• dom $f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• segno di f = segno di x^3



• comportamento agli estremi del dominio: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{2x+1} = 0$

$\Rightarrow \underline{y=0}$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$.

• f è continua su $\mathbb{R}$: composizione, somma, prodotto di funzioni continue.

• f è ricuramemente derivabile in ogni pt. escluso al più il pt. $x = -1$,

con $f'(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{e} & \text{se } x > -1 \\ 3x^2 e^{2x+1} + x^3 \cdot 2e^{2x+1} & \text{se } x < -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{3x^2}{e} & \text{se } x > -1 \\ x^2(3+2x)e^{2x+1} & \text{se } x < -1 \end{cases}$

* Va bene ovviamente se si prova f iniettiva usando la definizione o osservando che f è strett. decrescente (con i conti oppure "leggendo dal grafico") e f suriettiva osservando che $f(]0, +\infty[) =]-1, +\infty[$ (con i conti oppure "leggendo dal grafico").

Essendo f continua in $x=-1$, dal cond. del teorema di de L'Hôpital si ha $f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2(3+2x)e^{2x+1} = \frac{1}{e}$ e $f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2}{e} = \frac{3}{e}$.

Risulta che la funzione f ha un pt. angoloso in $x=-1$.

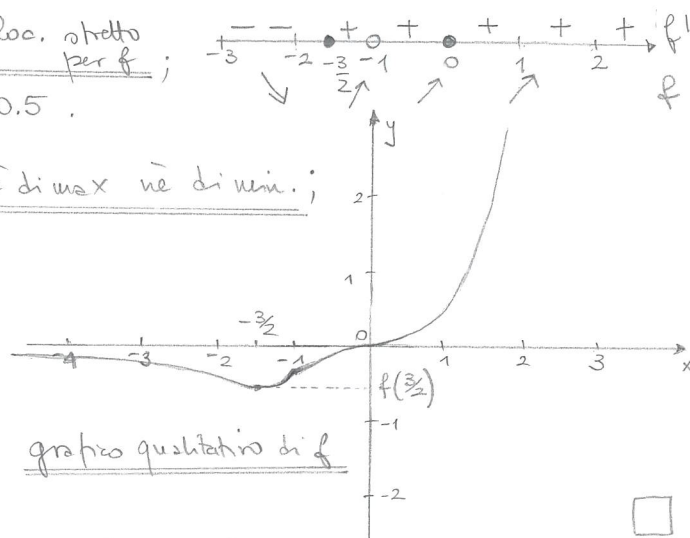
Infine $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}, x=0$ pt. critici di f

Risulta che $x=-\frac{3}{2}$ è un pt. di min. loc. stretto per f ;

inoltre $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{27}{8}e^{-2} \sim -0.5$.

$x=0$ è un pt. con tg orizzontale, nè di max nè di min;

inoltre $f(0)=0$.



ii) $F(x)$ è derivabile su $]-\infty, -1]$

(somma, composizione e prodotto di funzioni derivabili).

Basta verificare che $F'(x)=f(x)$ per $x \leq -1$. Abbiamo

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[\left(\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} \right) e^{2x+1} \right]' = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \right) e^{2x+1} + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} \right) \cdot 2e^{2x+1} \\ &= x^3 e^{2x+1} = \underline{f(x)}. \end{aligned}$$

iii) $\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^{-1} f(x) dx = \lim_{M \rightarrow -\infty} [F(-1) - F(M)] = F(-1) = \underline{\underline{-\frac{19}{8e}}}$
guardando degli infiniti

b4) i) Notiamo che $a_n = (6n^2+n) \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2n^2+4n^\alpha} \right) = \frac{(6n^2+n)}{2n^2+4n^\alpha} \cdot \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2n^2+4n^\alpha} \right)}{\frac{1}{2n^2+4n^\alpha}}$
 Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (6n^2+n) \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2n^2+4n^\alpha} \right) = \begin{cases} 3 & \text{se } \alpha < 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

ii) Abbiamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (6n^2+n) \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2n^2+4n^\alpha} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, con $a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$.

Quindi la serie converge o diverge positivamente.

Se $\underline{\alpha \leq 2}$, la serie data diverge positivamente, poiché non è soddisfatta

la cond. necessaria per la convergenza di una serie, ossia $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.
 (vedi i))

Se $\alpha > 2$, allora $a_n = (6n^2 + n) \arctg\left(\frac{1}{2n^2 + 4n\alpha}\right) \sim 6n^2 \cdot \frac{1}{4n\alpha}$ per $n \rightarrow +\infty$
 $= \frac{3}{2n^{\alpha-2}}$.

Poiché $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-2}} < +\infty \Leftrightarrow \alpha-2 > 1$, ossia $\alpha > 3$, per il criterio del confronto asintotico. La serie data, per $\alpha > 2$, è convergente $\Leftrightarrow \alpha > 3$. In definitiva, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è divergente positivamente, $\forall \alpha \leq 3$ e convergente $\forall \alpha > 3$. ■

b5) i) L'eq. caratteristica associata a $y'' - 9y = 0$ è $z^2 - 9 = 0$, le cui soluzioni sono $z_{1/2} = \pm 3$. L'integrale generale di $y'' - 9y = 0$ è quindi $y_0(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Poiché $z_{1/2} \neq 1$, cerchiamo una soluzione particolare dell'eq. diff. data (*) nella forma $\bar{y}(x) = h e^x$ con $h \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che $\bar{y}(x)$ risolva (*). Poiché $\bar{y}'(x) = \bar{y}''(x) = h e^x$, $\bar{y}(x)$ è soluzione di (*) $\Leftrightarrow h e^x - 9h e^x = 3 e^x \Leftrightarrow -8h = 3 \Leftrightarrow h = -\frac{3}{8}$. L'insieme delle soluzioni dell'eq. diff. (*) è quindi dato dalle funzioni $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x} - \frac{3}{8} e^x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

ii) $y(0) = 1 \Leftrightarrow 1 = c_1 + c_2 - \frac{3}{8}$, mentre $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0$. La soluzione di (*) soddisfacente $y(0) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$ risulta essere $y(x) = \frac{11}{8} e^{3x} - \frac{3}{8} e^x$, $x \in \mathbb{R}$. ■

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $x_0 = 2$ se $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$;

possiamo anche scrivere che f è continua in $x_0 = 2$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:
 $|f(x) - f(2)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}, |x - 2| < \delta$. □

ii) Enunciate e provate la formula del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica. ■