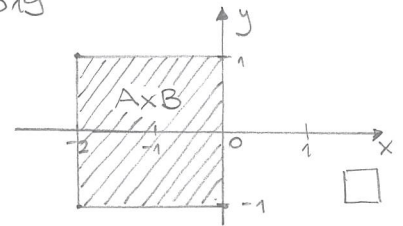


Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2018-2019 - TRENTO, 13 giugno 2019

FILA (A)

21) $A = [-2, 0]$, $B = [-1, 1]$



22) $z = 1 - \sqrt{3}i$ $z = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

23) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x|-1} > -1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x|-1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$

$=]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. L'insieme A non è limitato.

24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1+2x)}{e^{x^2}-1}$; oss. che $\frac{x \log(1+2x)}{e^{x^2}-1} = \frac{\log(1+2x)}{2x} \cdot \frac{2x^2}{e^{x^2}-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$.

25) $f(x) = x^3 - x$ in $\mathbb{R}$. Oss. che $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0$

$3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. I pt. critici di f sono $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

26) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. Osserviamo che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Risulta che $y = 2$ è asintoto orizz. per f , per $x \rightarrow -\infty$,
 per $x \rightarrow +\infty$.

27) $f(x) = -x^2 + 2x$ in $[0, 3]$. Oss. che $f(0) = 0$, $f(3) = -9 + 6 = -3$.

Notiamo che $f'(x) = -2x + 2$; dobb. determinare $c \in]0, 3[$ tale che $\frac{f(3)-f(0)}{3} = f'(c)$,
 ossia $c \in]0, 3[$: $\frac{-3}{3} = -2c + 2$, ossia $2c = 3$. Risulta $c = \frac{3}{2}$.

28) $\int \underbrace{x}_{f} \underbrace{\sin x}_{g'} dx = x(-\cos x) + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

29) $\sum_{n=0}^{+\infty} (x^2 - x)^n$ risulta convergente se e solo se $|x^2 - x| < 1$,
 se e solo se $-1 < x^2 - x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 > 0 \\ x^2 - x - 1 < 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La serie geometrica data risulta convergente $\Leftrightarrow x \in \left] \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right[$.

30) $y'' - y' = 0$: consid. l'eq. caratt. $z^2 - z = 0$ associata all'eq. diff.

Le sue soluzioni sono $z = 0$ e $z = 1$. le soluzioni dell'eq. diff. data sono

$y(x) = c_1 e^{0 \cdot x} + c_2 e^{1 \cdot x}$, ossia $y(x) = c_1 + c_2 e^x$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) i) Sia $f(x) = \begin{cases} b(x - \frac{1}{2}) + a \log(1-2x) & \text{se } x < 0 \\ ae^{bx} - \frac{3}{2} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Imponiamo la continuità in $x=0$, ossia $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

Risulta allora $-\frac{b}{2} = a - \frac{3}{2}$, ossia $2a + b = 3$.

La funzione è chiaramente derivabile in ogni punto escluso al più il punto di accordo $x=0$, con $f'(x) = \begin{cases} b - \frac{2a}{1-2x} & \text{se } x < 0 \\ abe^{bx} & \text{se } x > 0. \end{cases}$

Sia $2a + b = 3$, così che f è continua in $x=0$. Per studiare la derivabilità in $x=0$ calcoliamo il limite per x che tende a zero della funzione $f'(x)$. Per un corollario del teorema di de l'Hôpital, se tale limite esiste ed è uguale a $l \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in 0 e $f'(0) = l$.

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = b - 2a, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = ab,$$

vediamo che f è derivabile in $x=0$ se e solo se $b - 2a = ab$. Risulta allora che f è continua e derivabile in $x=0$ (e quindi per tutto $\mathbb{R}$!)

se e solo se $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ b - 2a = ab \end{cases} \iff \underline{(a, b) = (\frac{1}{2}, 2)} \text{ oppure } \underline{(a, b) = (3, -3)}.$

□

ii) Per avere $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$, dobbiamo scegliere f con b negativo,

ossia $f(x) = \begin{cases} -3(x - \frac{1}{2}) + 3 \log(1-2x) & \text{se } x < 0 \\ 3e^{-3x} - \frac{3}{2} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

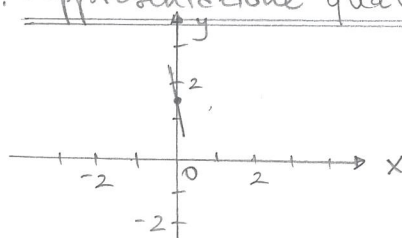
Notiamo che in un intorno sinistro di 0 abbiamo $f(x) = -3x + \frac{3}{2} - 6x + o(x)$

ossia $f(x) = \frac{3}{2} - 9x + o(x)$, mentre in un intorno destro di 0 abbiamo

$$f(x) = 3(1 - 3x) + o(x) - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - 9x + o(x).$$

Quindi, in un intorno (piccolo) di $x=0$ la funzione f si comporta come $g(x) = -9x + \frac{3}{2}$

e abbiamo la seg. rappresentazione qualitativa del grafico di f .



b2) lo sviluppo di Taylor della funzione arcotangente del primo ordine, centrato in $x=0$ è $\arctg x = x + o(x)$. lo sviluppo del denominatore è quindi $x \arctg x = x^2 + o(x^2)$; anche il numeratore deve essere quindi sviluppato almeno al secondo ordine. Ricordiamo che

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad "$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad "$$

e quindi, per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} e^{x^2-x} - \cos(\alpha x) + \log\left(1 + x - \frac{3}{2}x^2\right) &= 1 + (x^2-x) + \frac{1}{2}(x^2-x)^2 + o((x^2-x)^2) \\ &\quad - \left[1 - \frac{(\alpha x)^2}{2} + o((\alpha x)^2)\right] + \\ &\quad + \left[\left(x - \frac{3}{2}x^2\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}x^2\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{3}{2}x^2\right)^2\right)\right] \\ &= \cancel{1} + x^2 - \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \cancel{1} + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) + \cancel{x} - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1)x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Quindi possiamo concludere che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2-x} - \cos(\alpha x) + \log(1 + x - \frac{3}{2}x^2)}{x \arctg x} = 1$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha^2 - 1) = 1 \quad \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha = \pm \sqrt{3}}}$ ■

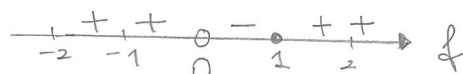
b3) i) $f(x) = \arctg\left(\left|x| - \frac{1}{x}\right|\right)$

• $\text{dom } f = \underline{\underline{\mathbb{R} \setminus \{0\}}} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

• $\arctg x$ conserva il segno di x ; quindi il segno

di f corrisponde al segno di $|x| - \frac{1}{x}$

Oss. $|x| - \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{x^2+1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \underline{\underline{y = \frac{\pi}{2} \text{ asintoto orizz. per } f, \text{ per } x \rightarrow -\infty}}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{\pi}{2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad \underline{\underline{y = \frac{\pi}{2} \text{ asintoto orizz. per } f, \text{ per } x \rightarrow +\infty}}$

• f è continua in tutti i pt. del suo dominio, essendo composizione e somma di funzioni continue.

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(-x - \frac{1}{x}) & \text{se } x < 0 \\ \arctan(x - \frac{1}{x}) & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad f \text{ è derivabile } \forall x \in \text{dom } f$$

Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + (x + \frac{1}{x})^2} \cdot (-1 + \frac{1}{x^2}) & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{1 + (x - \frac{1}{x})^2} \cdot (1 + \frac{1}{x^2}) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$

Risulta allora che $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \text{ è l'unico pt. critico per } f$

Si ha $f(-1) = \arctan 2$; inoltre

$x = -1$ è un pt. di minimo locale per f .

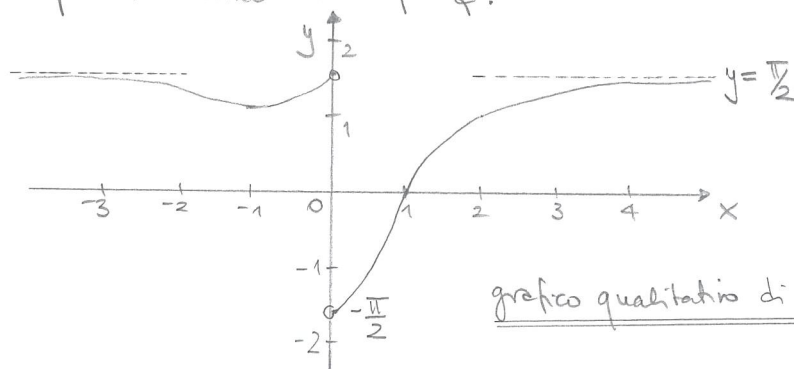
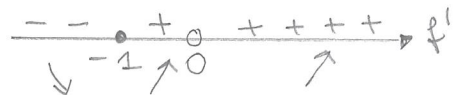


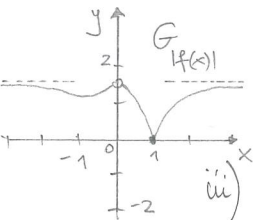
grafico qualitativo di f .

ii) Per $k \leq -\frac{\pi}{2}$ o $k \geq \frac{\pi}{2}$ Nono soluzioni dell'eq. $f(x) = k$
 per $-\frac{\pi}{2} < k < \arctan 2$ Una soluzione "

per $k = \arctan 2$ Sono due soluzioni "

per $\arctan 2 < k < \frac{\pi}{2}$ Sono tre soluzioni dell'eq. $f(x) = k$. □

$\inf_{x \in A} |f(x)| = 0$ $\sup_{x \in A} |f(x)| = \frac{\pi}{2}$, $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ■

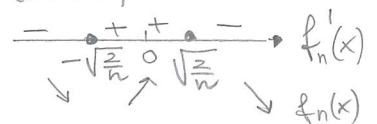


ba) i) $f_n(x) = \frac{x}{2+nx^2}$ è una funzione dispari su $\mathbb{R}$. Si ha $f_n(x)$

f_n è derivabile su $\mathbb{R}$ e $f'_n(x) = \frac{2+nx^2 - x \cdot 2nx}{(2+nx^2)^2} = \frac{2-nx^2}{(2+nx^2)^2}$. Risultato

$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x_{n/2} = \pm \sqrt{\frac{2}{n}}$. Si ha

$M_n = \max_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = \frac{\sqrt{\frac{2}{n}}}{2 + n \cdot \frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{2}}{4 \cdot \sqrt{n}}$. □



ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} (M_n)^\alpha = \frac{\sqrt{2}^\alpha}{4^\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$. Risultato che $\sum_{n=1}^{+\infty} (M_n)^\alpha$ è convergente

se e solo se $\frac{\alpha}{2} > 1$, ossia $\alpha > 2$. ■

b5) Per definizione di integrale improprio:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_2^M \frac{1}{e^x - 1} dx.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{e^x - 1} dx &= \int \frac{1}{t - 1} \cdot \frac{1}{t} dt = \left[\int \frac{1}{t - 1} dt - \int \frac{1}{t} dt \right] \\ &\quad \begin{matrix} e^x = t \\ x = \log t \\ dx = \frac{1}{t} dt \end{matrix} \\ &= \log |t - 1| - \log |t| + c \\ &= \log |e^x - 1| - \log e^x + c. \end{aligned}$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1} dx &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\log |e^x - 1| - \log e^x \right]_2^M = \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\log \left| \frac{e^M - 1}{e^M} \right| - \log \frac{e^2 - 1}{e^2} \right] \\ &= \log \left(\frac{e^2}{e^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

□

Per l'integrabilità (convergenza) dell'integrale dato basta osservare che $\frac{1}{e^x - 1} \sim \frac{1}{e^x}$ per $x \rightarrow +\infty$. Poiché chiaramente

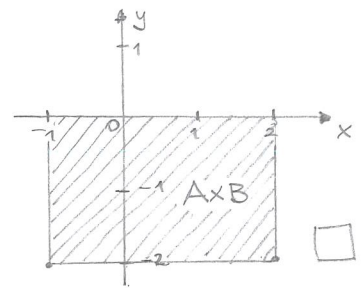
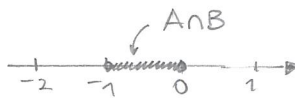
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx < +\infty, \text{ per il criterio del confronto asintotico si ha}$$

che anche l'integrale dato è convergente. ■

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice limitata inferiormente se $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. □

ii) Enunciate e provate il teorema fondamentale del calcolo integrale. ■

FILA(B) 21) $A = [-1, 2]$, $B = [-2, 0]$



22) $z = -1 + \sqrt{3}i$ $z = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$
 $z = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ $\square$

23) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x|-2} > -1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x|-2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 2\}$
 $=]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. L'insieme A non è limitato. $\square$

24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{2x}-1)}{\sin x^2}$; oss. che $\frac{x(e^{2x}-1)}{\sin x^2} = \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \frac{2x^2}{\sin x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{1} = 2$. $\square$

25) $f(x) = x - x^3$ su $\mathbb{R}$. Oss. che $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3x^2 = 0$
 $1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. I pt. critici di f sono $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. $\square$

26) $f(x) = \frac{-3x+1}{x+4}$. Osserviamo che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$.
 Risulta che $y = -3$ è asintoto orizz. per f , per $x \rightarrow -\infty$ e per $x \rightarrow +\infty$. $\square$

27) $f(x) = x^2 - 2x$ su $[0, 3]$. Oss. che $f(0) = 0$, $f(3) = 9 - 6 = 3$.
 Notiamo che $f'(x) = 2x - 2$; dobb. determinare $c \in]0, 3[$ t.c. $\frac{f(3)-f(0)}{3} = f'(c)$,
 ossia $c \in]0, 3[$: $\frac{3}{3} = 2c - 2$, ossia $2c = 3$. Risulta $c = \frac{3}{2}$. $\square$

28) $\int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{\cos x}_{g'} dx = x \sin x - \int \sin x dx = \underline{x \sin x + \cos x + c}$, $c \in \mathbb{R}$. $\square$

29) $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha^2 + \alpha)^n$ risulta convergente se e solo se $|\alpha^2 + \alpha| < 1$,
 se e solo se $-1 < \alpha^2 + \alpha < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \alpha + 1 > 0 \\ \alpha^2 + \alpha - 1 < 0 \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

La serie geometrica data risulta convergente $\Leftrightarrow \alpha \in \underline{\underline{\left[-\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]}}$. $\square$

30) $y'' + y' = 0$: consid. l'eq. caratt. $z^2 + z = 0$ associata all'eq. diff.
 le sue soluzioni sono $z = -1$ e $z = 0$. le soluzioni dell'eq. diff. data
 sono $y(x) = c_1 e^{-1 \cdot x} + c_2 e^{0 \cdot x}$, ossia $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\square$

b1) i) sia $f(x) = \begin{cases} b(x - \frac{1}{2}) + a \log(1-x) & \text{se } x < 0 \\ ae^{bx} - 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Imponiamo la continuità in $x=0$, ossia $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$.

Risulta allora $-\frac{b}{2} = a - 1$, ossia $2a + b = 2$.

La funzione è chiaramente derivabile in ogni punto escluso al più il punto di raccordo $x=0$, con $f'(x) = \begin{cases} b - \frac{a}{1-x} & \text{se } x < 0 \\ abe^{bx} & \text{se } x > 0. \end{cases}$

sia $2a + b = 2$, così che f è continua in $x=0$. Per studiare la derivabilità in $x=0$ calcoliamo il limite per x che tende a zero della funzione $f'(x)$. Per un corollario del teorema di de l'Hôpital, se tale limite esiste ed è uguale a $l \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in 0 e $f'(0) = l$. Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = b - a, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = ab,$$

vediamo che f è derivabile in $x=0 \iff b - a = ab$. Risulta

allora che f è continua e derivabile in $x=0$ (e quindi poi su tutto $\mathbb{R}$!) $\iff \begin{cases} 2a + b = 2 \\ b - a = ab \end{cases} \iff \underline{(a,b) = (\frac{1}{2}, 1)} \text{ oppi } \underline{(a,b) = (2, -2)}.$

ii) Per avere $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, dobbiamo scegliere f con b negativo, □

ossia $f(x) = \begin{cases} -2(x - \frac{1}{2}) + 2 \log(1-x) & \text{se } x < 0 \\ 2e^{-2x} - 1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

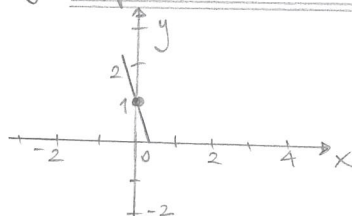
Notiamo che in un intorno sinistro di 0 abbiamo $f(x) = -2x + 1 - 2x + o(x)$,

ossia $f(x) = 1 - 4x + o(x)$, mentre in un intorno destro di 0 abbiamo

$f(x) = 2(1 - 2x) + o(x) - 1 = 1 - 4x + o(x)$. Quindi, in un intorno

(piccolo) di $x=0$ la funzione f si comporta come $g(x) = -4x + 1$

e possiamo dare la seg. representazione qualitativo del grafico di f .



b2) lo sviluppo di Taylor della funzione seno del primo ordine, centrato in $x=0$ è $\sin x = x + o(x)$. lo sviluppo del denominatore è quindi $x \sin x = x^2 + o(x^2)$; anche il numeratore deve essere quindi sviluppato almeno al secondo ordine. Ricordiamo che

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3) \quad "$$

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \quad "$$

e quindi, per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} e^{x^2-x} - \cos x + \log(1+x-x^2) &= 1 + (x^2-x) + \frac{1}{2}(x^2-x)^2 + o((x^2-x)^2) \\ &\quad - \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right] + \\ &\quad + \left[(x-x^2) - \frac{1}{2}(x-x^2)^2 + o((x-x^2)^2) \right] \\ &= \cancel{1} + x^2 - \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + \cancel{x} - x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= \left(\frac{3}{2} - x^2 \right) x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Quindi possiamo concludere che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2-x} - \cos x + \log(1+x-x^2)}{x \sin x} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} - x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

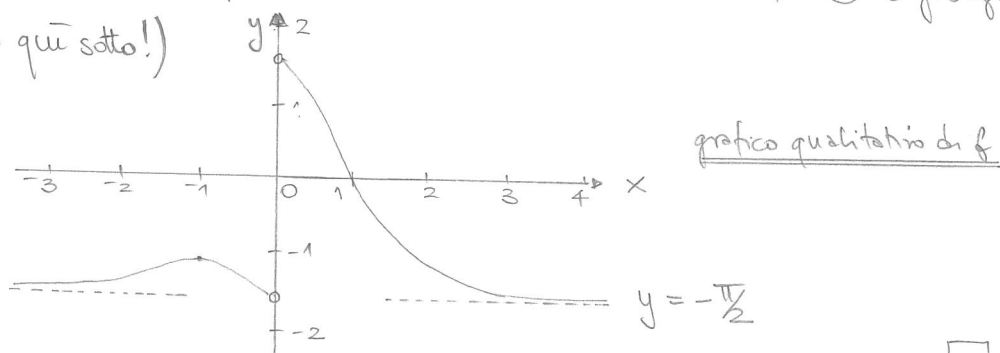
b3) i) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x} - |x|\right)$

Ricordiamo che $\arctan x$ è una funzione dispari su $\mathbb{R}$. Quindi

$$f(x) = \arctan\left[-\left(|x| - \frac{1}{x}\right)\right] = -\arctan\left(|x| - \frac{1}{x}\right).$$

Poiché in Fila (A), b3) i) abbiamo studiato la funzione $-f(x)$ possiamo subito tracciare il grafico della funzione $f(x)$.

(nota: ovviamente si può procedere dirett. con i conti come in fila (A) e giungere con il grafico qui sotto!)



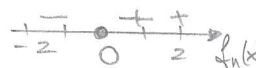
ii) Per $k \leq -\frac{\pi}{2}$ o $k \geq \frac{\pi}{2}$ Sono soluzioni dell'eq. $f(x)=k$

per $-\frac{\pi}{2} < k < -\arctan 2$ Sono tre soluzioni "

per $k = -\arctan 2$ Sono due soluzioni "

per $-\arctan 2 < k < \frac{\pi}{2}$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x)=k$. $\square$

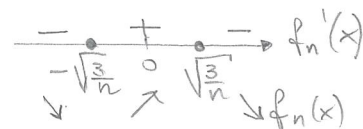
iii) $\inf_{x \in A} |f(x)| = 0$, $\sup_{x \in A} |f(x)| = \frac{\pi}{2}$, $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\blacksquare$

b4) i) $f_n(x) = \frac{x}{3+nx^2}$ è una funzione dispari su $\mathbb{R}$. Si ha 

f_n è derivabile su $\mathbb{R}$ e $f_n'(x) = \frac{3+nx^2-2nx^2}{(3+nx^2)^2} = \frac{3-nx^2}{(3+nx^2)^2}$. Risulta

$f_n'(x) = 0 \iff x_{n/2} = \pm \sqrt{\frac{3}{n}}$. Si ha

$$\underline{M_n = \max_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = \frac{\sqrt{\frac{3}{n}}}{3 + n \cdot \frac{3}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{n}}}.$$



ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} (M_n)^\alpha = \frac{\sqrt{3}^\alpha}{6^\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$. Risulta che $\sum_{n=1}^{+\infty} (M_n)^\alpha$ è convergente $\square$

se e solo se $\alpha/2 > 1$, ossia $\underline{\alpha > 2}$. $\blacksquare$

b5) Si procede come in FILA (A) b5). Si ottiene

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1} dx &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_3^M \frac{1}{e^x - 1} dx = \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\log |e^x - 1| - \log e^x \right]_3^M = \underline{\underline{\log \left(\frac{e^3}{e^3 - 1} \right)}}. \end{aligned}$$

La discussione sull'integralità (convergenza) dell'integrale si fa come in FILA (A) b5). $\blacksquare$

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice limitata superiormente se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

ii) Enunciate e provate il teorema fondamentale del calcolo integrale. $\blacksquare$