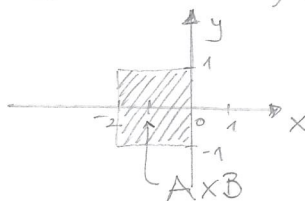
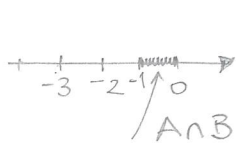


Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2018-2019 - TRENTO, 2 luglio 2019

FILA (A)

21)



☐

22) $z = 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$

☐

23) $A =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$; A non è limitato.

☐

24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^{2x} - 1)}{\sin x^2} = 2$

☐

25) $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

☐

26) $y = -3$ per $x \rightarrow -\infty$, per $x \rightarrow +\infty$.

☐

27) $C = 3/2$

☐

28) $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + c, \quad c \in \mathbb{R}$

☐

29) $\sum_{n=0}^{+\infty} (x^2 - x)^n$ è convergente $\forall x \in]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$

☐

30) $y'' + y' = 0 \rightsquigarrow y(x) = c_1 e^{-x} + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

☒

vedi

Esame scritto
 10 gennaio 2019
 FILA (A) b1)

b1) i) $w^2 - 3\bar{w} = 0 \rightsquigarrow w = x + iy$ con x, y da determinare.

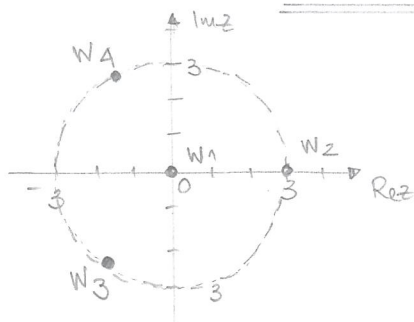
$w^2 - 3\bar{w} = 0 \Leftrightarrow (x + iy)^2 - 3(x - iy) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - y^2 + i(2xy + 3y) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y^2 = \frac{27}{4} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{w_1 = 0}, \underline{w_2 = 3}, \underline{w_3 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}, \underline{w_4 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$

osservando che $|w_2| = |w_3| = |w_4| = 3$, mentre $|w_1| = 0$.



ii) $z^3 = 27 \Leftrightarrow z^3 = 27(\cos 0 + i \sin 0)$. le soluzioni sono

$z_k = \sqrt[3]{27} \left(\cos \left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right)$ con $k = 0, 1, 2$,
ossia $z_0 = 3$, $z_1 = 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)$, $z_2 = 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)$. $\square$

iii) L'insieme delle soluzioni di b) coincide con l'insieme delle soluzioni di a) tranne che per $w_1 = 0$. $\blacksquare$

vedi
Esame scritto
13 giugno 2019
FILA (B) b2)

$$\begin{aligned} b2) \quad e^{x^2-x} - \cos x + \log(1+x-d^2x^2) &= 1 + (x^2-x) + \frac{1}{2}(x^2-x)^2 + o((x^2-x)^2) \\ &\quad - \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right] \\ &\quad + \left[(x-d^2x^2) - \frac{1}{2}(x-d^2x^2)^2 + o((x-d^2x^2)^2) \right] \\ &= \cancel{1} + x^2 - \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + \cancel{x} - d^2x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= \left(\frac{3}{2} - d^2 \right) x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Quindi

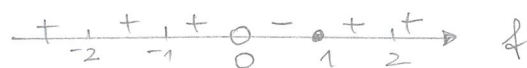
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2-x} - \cos x + \log(1+x-d^2x^2)}{x \ln x} = 1 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{3}{2} - d^2 \right) x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2} - d^2 = 1 \Leftrightarrow d = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

vedi
Esame scritto
13 giugno 2019
FILA (A) b3)

b3) $f(x) = \operatorname{arctg} \left(|x| - \frac{1}{x} \right)$

i) $\bullet \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left(-\frac{(x^2+1)}{x} \right) & \text{se } x < 0 \\ \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2-1}{x} \right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

$y = \frac{\pi}{2}$ a.o. per f , per $x \rightarrow -\infty$ e $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + (x + \frac{1}{x})^2} \cdot \left(-1 + \frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{1 + (x - \frac{1}{x})^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1.$

$x = -1$ pt. critico e $f(-1) = \arctan 2$

$x = -1$ pt. di min. loc. stretto per f

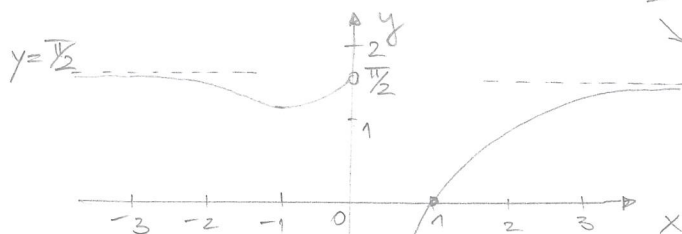


grafico qualitativo di f .

ii) $k \leq -\frac{\pi}{2}$ o $k \geq \frac{\pi}{2}$ nessuna soluzione di $f(x) = k$;
 $-\frac{\pi}{2} < k < \arctan 2$ $\exists$ una sol. di $f(x) = k$

$k = \arctan 2$ Sono due

$\arctan 2 < k < \frac{\pi}{2}$ Sono tre

iii) $\inf_{x \in A} |f(x)| = 0$ $\sup_{x \in A} |f(x)| = \frac{\pi}{2}$ $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

vedi b4) i) Da $\min x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$ si ha che

Seconda Prova Int. 21 dicembre 2018 FILA (A) b4) $0 < \min \left(\frac{1}{\sqrt{n} + 1} \right) \sim \frac{1}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{n^{2\alpha + 1/2}}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Per il criterio del confronto asintotico si conclude che la serie data è convergente $\Leftrightarrow 2\alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha > \frac{1}{4}}}$.

ii) Posto $a_n = \frac{e^n}{\sqrt{n} + 1} > 0$, per il criterio del rapporto si ottiene

che il raggio di convergenza della serie di potenze data è $r = \frac{1}{e}$.
 Quindi la serie è ricorsivamente convergente $\forall x \in]2 - \frac{1}{e}, 2 + \frac{1}{e}[$.

In $x = 2 + \frac{1}{e}$ la serie è divergente per il confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

In $x = 2 - \frac{1}{e}$ la serie converge per il criterio di Leibniz. In

definitiva, l'intervallo di convergenza della serie data è
 $E = \left[2 - \frac{1}{e}, 2 + \frac{1}{e}\right]$. ■

vedi
Esame orale
13 giugno 2019
FLA (A) b5)

b5)
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_2^M \frac{1}{e^x - 1} dx$$

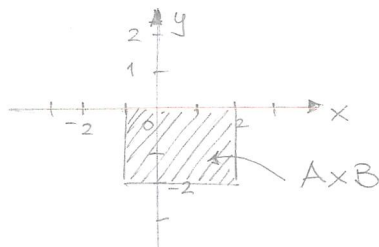
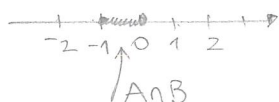
$$\int \frac{1}{e^x - 1} dx \stackrel{\substack{e^x = t \\ dx = \frac{1}{t} dt}}{=} \int \frac{1}{t-1} \cdot \frac{1}{t} dt = \left[\int \frac{1}{t-1} dt - \int \frac{1}{t} dt \right] \\ = \log|e^x - 1| - \log e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1} dx = \underline{\underline{\log \left(\frac{e^2}{e^2 - 1} \right)}}. \quad (= 2 - \log(e^2 - 1)). \quad \blacksquare$$

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice limitata superiormente se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c.
 $f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$. □

ii) Enunciate e provate il teorema fondamentale del calcolo integrale. ■

FILA (B) a1)



Vedi:
Esame scritto
13 giugno 2019
FILA (A) & (B)

22) $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

23) $A =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$; A non è limitato.

24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1+2x)}{e^{x^2}-1} = 2$.

25) $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

26) $y = 2$ per $x \rightarrow -\infty$, per $x \rightarrow +\infty$.

27) $c = \frac{3}{2}$.

28) $\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

29) $\sum_{n=0}^{+\infty} (x^2+x)^n$ è convergente $\forall x \in]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[$.

30) $y'' - y' = 0 \rightsquigarrow y(x) = c_1 e^x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

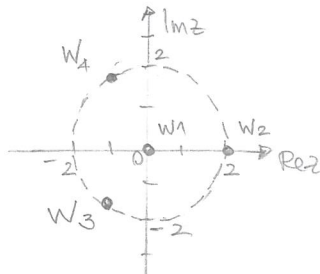
Vedi:
Esame scritto
10 gennaio 2019
FILA (B) b1)

b1) i) $w^2 - 2\bar{w} = 0 \rightsquigarrow w = x + iy$ con x, y da determinare.

$w^2 - 2\bar{w} = 0 \Leftrightarrow (x+iy)^2 - 2(x-iy) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - y^2 + i(2xy + 2y) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y^2 = 3 \\ x = -1 \end{cases}$



$\Rightarrow \underline{w_1 = 0}, \underline{w_2 = 2}, \underline{w_3 = -1 - \sqrt{3}i}, \underline{w_4 = -1 + \sqrt{3}i}$.

Osserviamo che $\underline{|w_2| = |w_3| = |w_4| = 2}$, mentre $|w_1| = 0$.

ii) $z^3 = 8 \Leftrightarrow z^3 = 8(\cos 0 + i \sin 0)$. le soluzioni sono

$$z_k = \sqrt[3]{8} \left(\cos\left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) \right) \text{ con } k=0,1,2,$$

Ossia $\underline{z_0=2}$, $\underline{z_1=2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$, $\underline{z_2=2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$. $\square$

iii) L'insieme delle soluzioni di b) coincide con l'insieme delle soluzioni di a) tranne che per $w_1=0$. $\square$

vedi
Esame scritto
13 giugno 2019
FILA (A) b2)

$$\begin{aligned} \text{b2)} \quad e^{x^2-x} - \cos(\alpha x) + \log\left(1+x-\frac{3}{2}x^2\right) &= 1 + (x^2-x) + \frac{1}{2}(x^2-x)^2 + o((x^2-x)^2) \\ &\quad - \left[1 - \frac{(\alpha x)^2}{2} + o((\alpha x)^2)\right] + \\ &\quad + \left[\left(x-\frac{3}{2}x^2\right) - \frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}x^2\right)^2 + o\left(\left(x-\frac{3}{2}x^2\right)^2\right)\right] \\ &= \cancel{1} + x^2 - \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \cancel{1} + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) + \cancel{x} - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha^2-1)x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2-x} - \cos(\alpha x) + \log\left(1+x-\frac{3}{2}x^2\right)}{x \arctan x} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}(\alpha^2-1)x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 1$$

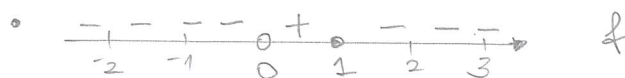
$$\iff \frac{1}{2}(\alpha^2-1) = 1 \iff \underline{\underline{\alpha = \pm\sqrt{3}}}. \quad \square$$

vedi
Esame scritto
13 giugno 2019
FILA (B) b3)

b3) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x} - |x|\right)$

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1+x^2}{x}\right) & \text{se } x < 0 \\ \arctan\left(\frac{1-x^2}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $y = -\frac{\pi}{2}$ a.o. per f , per $x \rightarrow -\infty$ e $+\infty$.

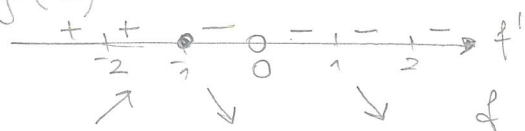
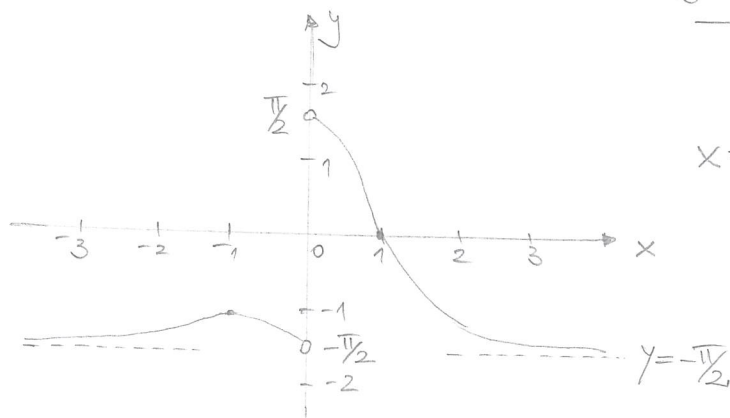
$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

• $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{1 + \left(-x + \frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-1 - \frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -1$.

$x = -1$ pt. critico e $f(-1) = \arctg(-2)$



$x = -1$ pt. di max. loc. stretto per f

grafico qualitativo di f .



- ii) $k \leq -\frac{\pi}{2}$ o $k \geq \frac{\pi}{2}$ nessuna soluzione di $f(x) = k$;
 $-\frac{\pi}{2} < k < \arctg(-2)$ Sono tre sol. "
 $k = \arctg(-2)$ Sono due sol. "
 $\arctg(-2) < k < \frac{\pi}{2}$ una soluz. " .



- iii) $\inf_{x \in A} |f(x)| = 0$ $\sup_{x \in A} |f(x)| = \frac{\pi}{2}$ $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



vedi
 seconda Prova Int.
 21 dicembre 2018
 FILA (B) b4)

- i) Da $\arctg x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$ si ha che
 $0 < \frac{\arctg\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{\frac{1}{n^{3\alpha}}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3\alpha+1/2}}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Per il criterio del confronto asintotico si conclude che la serie data è convergente $\Leftrightarrow 3\alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha > \frac{1}{6}}}$.



- ii) Posto $a_n = \frac{e^n}{\sqrt{n+2}} > 0$, per il criterio del rapporto si ottiene

che il raggio di convergenza della serie di potenze data è $r = \frac{1}{e}$.

Quindi la serie è sicuramente convergente $\forall x \in \left]3 - \frac{1}{e}, 3 + \frac{1}{e}\right[$.

In $x = 3 + \frac{1}{e}$ la serie è divergente per il confronto asintotico con la serie $\sum_{h=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{h}}$.

In $x = 3 - \frac{1}{e}$ la serie converge per il criterio di Leibniz. In

definitiva, l'insieme di convergenza della serie data è
 $E = \left[3 - \frac{1}{e}, 3 + \frac{1}{e} \right]$. □

vedi
 ESAME scritto
 13 giugno 2019
 FILA (B) b5)

b5)
$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_3^n \frac{1}{e^x - 1} dx$$

$$\int \frac{1}{e^x - 1} dx = \int \frac{1}{t-1} \cdot \frac{1}{t} dt = \left[\int \frac{1}{t-1} dt - \int \frac{1}{t} dt \right]$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ e^x = t \\ dx = \frac{1}{t} dt \end{matrix}$

$$= \log |e^x - 1| - \log e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \int_3^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1} dx = \underline{\log \left(\frac{e^3}{e^3 - 1} \right)}, \quad (= 3 - \log(e^3 - 1))$$
□

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice limitata inferiormente se $\exists m \in \mathbb{R}$ t.c.
 $f(x) \geq m \quad \forall x \in \mathbb{R}$. □

ii) Enunciate e provate il teorema fondamentale del calcolo integrale. □