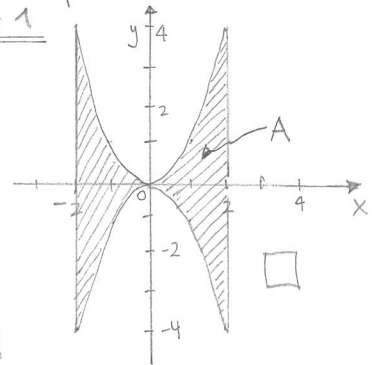


Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2018-2019 - Trento, 5 settembre 2019

FILA (A)

21) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq x^2\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -x^2 \leq y \leq x^2\}$

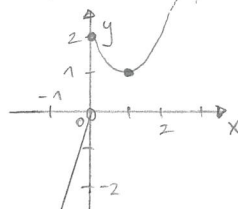


22) $z = \frac{2}{i} + 4i = \frac{2}{i} + 4i = -2i + 4i = 2i \Rightarrow$

$\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 2$.

23) $\arcsin(2-x) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \leq 2-x < 1 \Leftrightarrow x \in \underline{\underline{[1, 3]}}$

24) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x < 0 \\ (x-1)^2 + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$



$f(\mathbb{R}) =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$.

25) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3^n + e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \sqrt[n]{1 + \left(\frac{e}{3}\right)^n} = \underline{\underline{3}}$.

26) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = e^{2x} \sin x$ $(g \circ f)'(1) = (e^{2(x^2-1)} \sin(x^2-1))'(1)$

oppure $(g \circ f)'(1) = g'(f(1)) f'(1) = g'(0) f'(1) = [2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x]_{x=0} \cdot [2x]_{x=1} = \underline{\underline{2}}$.

27) $F(x) = \int_0^x (e^{t^2} + t) dt$; $F'(x) = e^{x^2} + x$ $F''(x) = 2xe^{x^2} + 1$. Abbiamo che il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato in $x_0 = 0$, è $P(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2$; quindi $P(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 = x + \frac{x^2}{2}$.

28) $\int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x} dx = \int \left(3x + 2 - \frac{1}{x}\right) dx = \underline{\underline{\frac{3x^2}{2} + 2x - \log|x| + c}}$, $c \in \mathbb{R}$.

29) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{n!}\right) x^n$: serie di potenze con centro $x_0 = 0$. Poiché

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0$,

si ha che il raggio di convergenza è $r = +\infty$.

30) $y' = 3y$; possiamo vedere quest'eq. diff. come eq. diff. a variabili separabili oppure come eq. diff. lineare del 1° ordine con $a(x) = 3$, $b(x) = 0$. Allora la formula risolutiva ci dà $y(x) = ce^{3x}$, $c \in \mathbb{R}$.

b1) Poniamo $z = 1 + \sqrt{3}i$. Si ha $z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. Le due radici quadrate di z sono allora

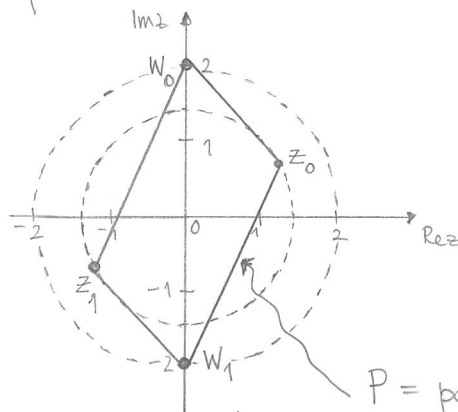
$$\underline{\underline{z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)}}$$

$$\underline{\underline{z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)}}$$

Analogamente, poniamo $w = -4$. Si ha $w = 4\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$. Le due radici quadrate di w sono allora

$$\underline{\underline{w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i}}$$

$$\underline{\underline{w_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i}}$$



$P =$ poligono con vertici z_0, w_0, z_1, w_1 .

ii) perimetro di $P = 2(|z_0 - w_0| + |z_0 - w_1|)$ $(= 2(\text{distanza tra } z_0 \text{ e } w_0 + \text{distanza tra } z_0 \text{ e } w_1))$

$$= 2\left(\sqrt{(\operatorname{Re} z_0 - \operatorname{Re} w_0)^2 + (\operatorname{Im} z_0 - \operatorname{Im} w_0)^2} + \sqrt{(\operatorname{Re} z_0 - \operatorname{Re} w_1)^2 + (\operatorname{Im} z_0 - \operatorname{Im} w_1)^2}\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\right)^2}\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{(1-2\sqrt{2})^2}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{(1+2\sqrt{2})^2}{2}}\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{2(3-\sqrt{2})} + \sqrt{2(3+\sqrt{2})}\right) = \underline{\underline{2\sqrt{2}(\sqrt{3-\sqrt{2}} + \sqrt{3+\sqrt{2}})}}.$$

b2) Dobbiamo calcolare il seguente $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \int_0^x (\sin t \cos t + \arctan 2t - 1) dt}{1 - \cos x}$.

Notiamo subito che esso si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Avendo al numeratore la presenza di una funzione integrale, cerchiamo di applicare il teorema di de l'Hôpital per il calcolo del limite dato (dopo aver verificato che tutte le ipotesi del teorema sono verificate). Abbiamo per ogni $x \neq 0$ in un intorno di 0

$$\frac{\left(x + \int_0^x (\sin t \cos t + \arctan 2t - 1) dt\right)'}{(1 - \cos x)'} \stackrel{\text{TFC}}{=} \frac{1 + \sin x \cos x + \arctan 2x - 1}{\sin x} =$$

$$= \cos x + \frac{\arctan 2x}{\sin x} \stackrel{-3-}{=} \cos x + \frac{\arctan 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{\sin x} \quad \text{per usare semplicemente i limiti notevoli}$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x + \int_0^x (\sin t \cos t + \arctan 2t - 1) dt)'}{(1 - \cos x)'} = 3$ e dal teorema di

de l'Hôpital segue $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \int_0^x (\sin t \cos t + \arctan 2t - 1) dt}{1 - \cos x} = \underline{\underline{3.}}$

b3) i) $f(x) = \frac{x - |x| - 2}{x^2 + 3}$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

• segno di f  $f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-1)}{x^2+3} & \text{se } x < 0 \\ \frac{-2}{x^2+3} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizz.
per f , per $x \rightarrow \begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}$.

• f è continua su tutto $\mathbb{R}$ essendo somma, rapporto di funzioni continue e il denominatore non si annulla mai.

• f è derivabile in tutti i pt. di $\mathbb{R}$ tranne al più nel pt. $x=0$.

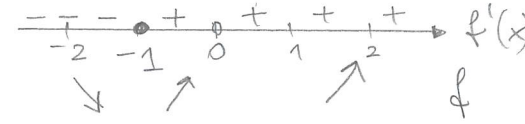
Osserviamo che $f'(x) = \begin{cases} \frac{2(x^2+3) - 2(x-1)2x}{(x^2+3)^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{4x}{(x^2+3)^2} & \text{se } x > 0, \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x^2 + 4x + 6}{(x^2+3)^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{4x}{(x^2+3)^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

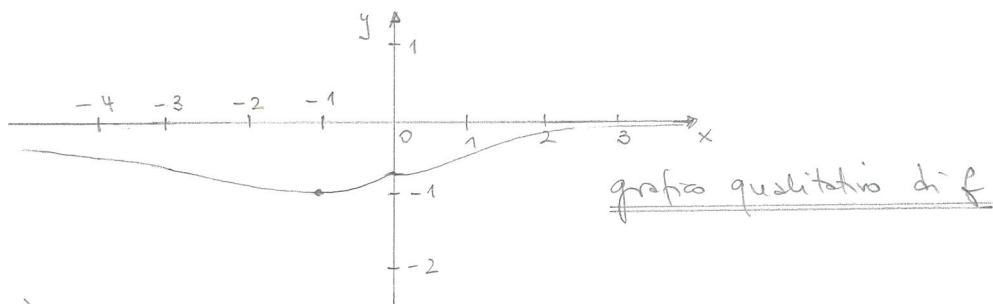
Poiché f è continua in $x=0$, da un corollario del teorema

di de l'Hôpital segue che $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{2}{3}$ e

$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$. Risulta che in $x=0$, la funzione f ha un punto angoloso.

Infine $f'(x) = 0$ per $x < 0 \Leftrightarrow$  $\begin{cases} -2x^2 + 4x + 6 = 0 \\ x < 0. \end{cases}$

Risulta che $x=-1$ è un pt. critico per f ; esso è un pt. di min. loc. stretto e $f(-1) = -1$.



ii) Basta osservare che $f(-3) = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3} = f(0)$. Inoltre f è continua su $[-3, 0]$ e derivabile su $] -3, 0[$. Quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle.

iii) $y = -1$ è l'eq. della retta t_2 al grafico di f (poiché $f(-1) = -1$ e $f'(-1) = 0$!).

b4) Dovremo determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[e^{\frac{4}{n}} - 1 - \frac{\alpha^2}{n} \right] \sqrt[3]{n}.$$

Osserviamo che utilizzando lo sviluppo di Taylor al secondo ordine, centrato in $x_0 = 0$, di e^x , con $x = \frac{4}{n}$ si ottiene, per $n \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \left[e^{\frac{4}{n}} - 1 - \frac{\alpha^2}{n} \right] \sqrt[3]{n} &\sim \sqrt[3]{n} \left[\cancel{1} + \frac{4}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{n} \right)^2 - \cancel{1} - \frac{\alpha^2}{n} \right] \\ &= \sqrt[3]{n} \left[\frac{4 - \alpha^2}{n} + \frac{8}{n^2} \right] = \frac{4 - \alpha^2}{n^{2/3}} + \frac{8}{n^{5/3}} \\ &\sim \begin{cases} \frac{4 - \alpha^2}{n^{2/3}} & \text{se } 4 - \alpha^2 \neq 0 \\ \frac{8}{n^{5/3}} & \text{se } 4 - \alpha^2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi, la serie proposta è una serie a termini di segno fissato (positivo se $-2 < \alpha < 2$ e negativo per $\alpha < -2$ o $\alpha > 2$) e, dal confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, risulta essere divergente positivamente se $-2 < \alpha < 2$ e divergente negativamente per $\alpha < -2$ o $\alpha > 2$. Se $\alpha = \pm 2$ invece, sempre dal confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie data risulta essere convergente.

b5) $f_a(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$; allora i) Se $a=0$: $f_0(x) = \frac{1}{x^2}$ e $\text{dom } f_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se $a > 0$: $f_a(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ $\text{dom } f_a = \mathbb{R}$. □

ii) Se $a=0$: $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c \quad c \in \mathbb{R}$.

Risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_0(x) = 0 \Leftrightarrow \underline{F_0(x) = -\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned} \text{Se } a > 0: \quad \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{a^2} + 1} dx = \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{\frac{x}{a}}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \\ &= \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_a(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2a} + c = 0$.

Quindi la primitiva ricercata risulta essere

$$\underline{F_a(x) = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\pi}{2a}}. \quad \blacksquare$$

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. $f'(2) = 1$ significa che

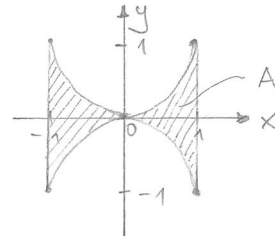
$$\underline{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \text{ esiste finito ed \u00e9 uguale a } 1,}$$

oppure equiv.

$$\underline{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \text{ esiste finito e vale } 1.} \quad \square$$

ii) Enunciate e provate il teorema di Fermat. \blacksquare

FLA (B) a1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq x^2\}$

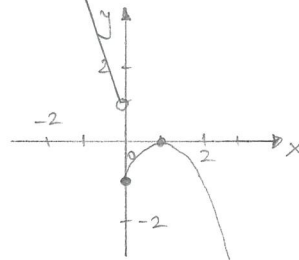


a2) $z = \frac{1}{i} - 2i = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} - 2i = -i - 2i = -3i$

$\Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{Re} z = 0}} \quad \underline{\underline{\operatorname{Im} z = -3.}}$

a3) $\arcsin(3-x) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \leq 3-x < 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x \in]2, 4[.}}$

a4) $f(x) = \begin{cases} -3x+1 & \text{se } x < 0 \\ -(x-1)^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$



$\underline{\underline{f(\mathbb{R}) =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[.}}$

a5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{4^n + e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \sqrt[n]{1 + \left(\frac{e}{4}\right)^n} = \underline{\underline{4.}}$

a6) $f(x) = x^2 - 1 \quad g(x) = e^{3x} \sin x \quad (g \circ f)'(x) = (e^{3(x^2-1)} \sin(x^2-1))'(1)$ oppure
 $(g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1) = [3e^{3x} \sin x + e^{3x} \cos x]_{x=0} [2x]_{x=1} = \underline{\underline{2.}}$

a7) $F(x) = \int_0^x (t - e^{t^2}) dt : F'(x) = x - e^{x^2} \quad F''(x) = 1 - 2xe^{x^2}.$

Abbiamo che il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato in $x_0 = 0$,
 è $P(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 = 0 + (-1)x + \frac{1}{2}x^2$; quindi
 $P(x) = -x + \frac{x^2}{2}.$

a8) $\int \frac{4x^2 - 2x + 1}{x} dx = \int \left(4x - 2 + \frac{1}{x}\right) dx = 4\frac{x^2}{2} - 2x + \log|x| + c, c \in \mathbb{R}$
 $= 2x^2 - 2x + \log|x| + c, c \in \mathbb{R}.$

a9) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n!}{3^n}\right) x^n$: serie di potenze con centro $x_0 = 0$. Poiché
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3} = +\infty$,
 si ha che il raggio di convergenza è $r = 0.$

a10) $y' = 4y$; possiamo vedere quest'eq. diff. come eq. diff. a variabili separabili
 oppure come eq. diff. lineare del 1° ordine con $a(x) = 4, b(x) = 0$. Risulta $y(x) = ce^{4x}$
 $c \in \mathbb{R}.$

b1) Poniamo $z = 1 - \sqrt{3}i$. Si ha $z = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$.

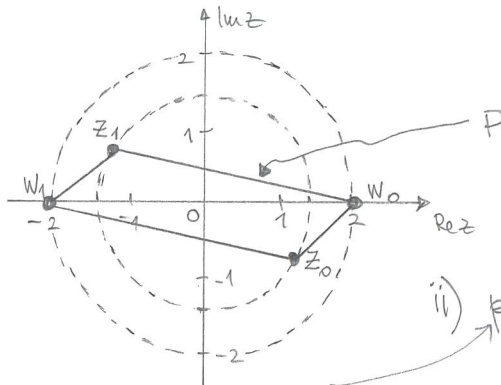
Le due radici quadrate di z sono $z_0 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right)$

$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right).$$

Analogamente, poniamo $w = 4$. Si ha $w = 4 \left(\cos 0 + i \sin 0 \right)$. Le due

radici quadrate di w sono allora $w_0 = 2 \left(\cos 0 + i \sin 0 \right) = 2$

$$w_1 = 2 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right) = -2.$$



$= 2 \left(\text{distanza tra } z_0 \text{ e } w_0 + \text{distanza tra } z_0 \text{ e } w_1 \right)$

ii) perimetro di $P =$

$$= 2 \left(|z_0 - w_0| + |z_0 - w_1| \right)$$

$$= 2 \left(\sqrt{(Re z_0 - Re w_0)^2 + (Im z_0 - Im w_0)^2} + \sqrt{(Re z_0 - Re w_1)^2 + (Im z_0 - Im w_1)^2} \right)$$

$$= 2 \left(\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \right)$$

$$= 2 \left(\sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})^2}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^2}{2} + \frac{1}{2}} \right)$$

$$= 2 \left(\sqrt{2(3 - \sqrt{6})} + \sqrt{2(3 + \sqrt{6})} \right) = \underline{\underline{2\sqrt{2}(\sqrt{3 - \sqrt{6}} + \sqrt{3 + \sqrt{6}})}}.$$

b2) Dobbiamo calcolare il seguente $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \int_0^x (\sin 3t \cos t + \arctan t + 1) dt}{1 - \cos x}$.

Notiamo subito che esso si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Avendo al numeratore la presenza di una funzione integrale, cerchiamo di applicare il teorema di de l'Hôpital per il calcolo del limite dato (dopo aver verificato che tutte le ipotesi del teorema sono verificate). Abbiamo per ogni $x \neq 0$ in un intorno di 0

$$\frac{\left(x - \int_0^x (\sin 3t \cos t + \arctan t + 1) dt \right)'}{(1 - \cos x)'} \stackrel{\text{TFC}}{=} \frac{1 - \sin 3x \cos x - \arctan x - 1}{\sin x} =$$

per usare semplicemente i limiti notevoli

$$= -\frac{\sin 3X \cos X - \arctg X}{\sin X} = \frac{-\sin 3X}{3X} \cdot \frac{3X}{\sin X} \cos X - \frac{\arctg X}{X} \cdot \frac{X}{\sin X}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - \int_0^x (\sin 3t \cos t + \arctg t + 1) dt)'}{(1 - \cos x)'} = -3 - 1 = -4$ e dal

teorema di de l'Hôpital segue $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \int_0^x (\sin 3t \cos t + \arctg t + 1) dt}{1 - \cos x} = -4$.

b3) i) $f(x) = \frac{x + |x| + 2}{x^2 + 3}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2 + 3} & \text{se } x < 0 \\ \frac{2(x+1)}{x^2 + 3} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

• segno di f 

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asintoto orizzont.

per f , per $x \rightarrow \begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}$

- f è continua su tutto $\mathbb{R}$ essendo somma, rapporto di funzioni continue e il denominatore non si annulla mai.
- f è derivabile in tutti i punti di $\mathbb{R}$ tranne al più nel pt. $x=0$.

Osserviamo che

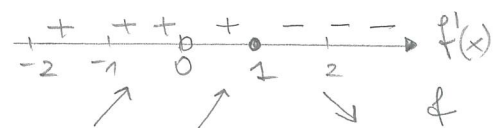
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(x^2+3)^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{2(x^2+3) - 2(x+1)2x}{(x^2+3)^2} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-4x}{(x^2+3)^2} & \text{se } x < 0 \\ \frac{-2x^2 - 4x + 6}{(x^2+3)^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x=0$, da un corollario del teorema di de l'Hôpital segue che $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$ e

$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{2}{3}$. Risulta che in $x=0$, la funzione f ha un punto angoloso.

Infine $f'(x) = 0$ per $x > 0 \Leftrightarrow x = 1$



Risulta che $x=1$ è un pt. critico per f ;

esso è un pt. di max. loc. stretto e $f(1) = 1$.

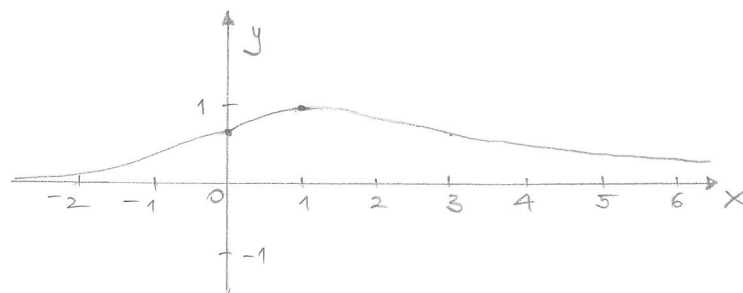


grafico qualitativo di f

□

ii) Basta osservare che $f(3) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = f(0)$. Inoltre f è continua su $[0,3]$ e derivabile su $]0,3[$. Quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle.

□

iii) $y=1$ è l'eq. della retta tg. al grafico di f (poiché $f(1)=1$ e $f'(1)=0$!).

■

b4) Dobbiamo determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[e^{\frac{g}{n}} - 1 - \frac{\alpha^2}{n} \right] \sqrt[4]{n}$.

Osserviamo che utilizzando lo sviluppo di Taylor al secondo ordine, centrato in $x_0=0$, di e^x , con $x = \frac{g}{n}$ si ottiene, per $n \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} \left[e^{\frac{g}{n}} - 1 - \frac{\alpha^2}{n} \right] \sqrt[4]{n} &\sim \sqrt[4]{n} \left[1 + \frac{g}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{n} \right)^2 - 1 - \frac{\alpha^2}{n} \right] \\ &= \sqrt[4]{n} \left[\frac{g - \alpha^2}{n} + \frac{81}{2n^2} \right] = \frac{g - \alpha^2}{n^{3/4}} + \frac{81}{2n^{7/4}} \\ &\sim \begin{cases} \frac{g - \alpha^2}{n^{3/4}} & \text{se } g - \alpha^2 \neq 0 \\ \frac{81}{2n^{7/4}} & \text{se } g - \alpha^2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi, la serie proposta è una serie a termini di segno fissato (positivo se $-3 < \alpha < 3$ e negativo se $\alpha < -3$ o $\alpha > 3$) e, dal confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, risulta essere diverg. posit. se $-3 < \alpha < 3$ e diverg. negativ. per $\alpha < -3$ o $\alpha > 3$.

Se $\alpha = \pm 3$ invece, sempre dal confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, la serie data risulta essere convergente.

■

b5) vedi FILA (A) b5). 

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. $f'(1) = 2$ significa che
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ esiste finito ed è uguale a 2,

oppure equiv.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ esiste finito e vale 2. 

ii) Enunciare e provare il teorema di Fermat. 