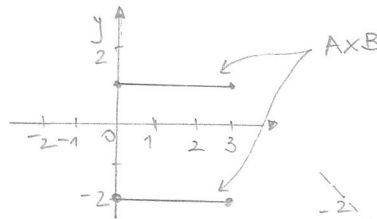


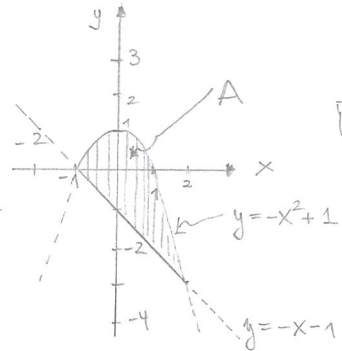
Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 PRIMA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2018-2019 - Trento, 6 novembre 2018

FILA A 21) $A = [0, 3]$, $B = \{-2, 1\}$



22) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -x-1 \leq y \leq -x^2+1\}$

Nota: $-x-1 = -x^2+1 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$
 $\Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0$



23) $z = \frac{4}{i+1} = \frac{4}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$

$\operatorname{Re} z = 2$, $\operatorname{Im} z = -2$.

24) $z = 2-2i$. Allora $z = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$.

Quindi $z^6 = (2\sqrt{2})^6 \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \right) = (2\sqrt{2})^6 i$.

25) $A =]-\infty, -2[$. Allora $\sup A = -2$, ma $\nexists \max A$.

26) $f(x) = \begin{cases} (x-2a)^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Allora f è continua in $x=0 \Leftrightarrow$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x-2a)^2 = 4a^2 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{2}$.

27) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 + 4 \sin|x|$. Notiamo che $-1 \leq \sin|x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Allora $-4 \leq 4 \sin|x| \leq 4$ e infine $3-4 \leq f(x) \leq 3+4$.

Risultava $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = [-1, 7]$.

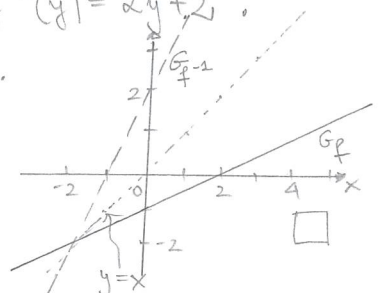
28) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$. Oss. che fissato $y \in \mathbb{R}$ mi ha $y = \frac{1}{2}x - 1$

$\Leftrightarrow 2y = x - 2 \Leftrightarrow x = 2y + 2$. Risultava che $f^{-1}(y) = 2y + 2$.

Operando il cambio $y \leftrightarrow x$ mi ha $f^{-1}(x) = 2x + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

29) $\arcsin(2x-1) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \leq 2x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x < 2$

$\Rightarrow S = [0, 1[$.



30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4x}) = \lim_{(\infty-\infty)} (x - \sqrt{x^2 - 4x}) \frac{(x + \sqrt{x^2 - 4x})}{(x + \sqrt{x^2 - 4x})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x + x\sqrt{1 - \frac{4}{x}}} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$

b) i) Data l'eq. $2\bar{z} + (1+i) - \frac{(1+2\operatorname{Re}z)^2}{2z} = 0$, osserviamo subito che $z=0$ non è soluzione dell'eq. Moltiplicando per l'eq. per $2z$ otteniamo l'eq. equivalente $4z\bar{z} + 2z(1+i) - (1+2\operatorname{Re}z)^2 = 0$, ossia

$$4|z|^2 + 2z(1+i) - (1+2\operatorname{Re}z)^2 = 0.$$

Poniamo $z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che z soddisfi quest'ultima eq. che diventa

$$4(x^2+y^2) + 2(x+iy)(1+i) - (1+2x)^2 = 0,$$

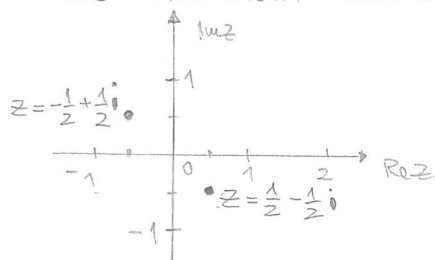
ossia

$$4x^2 + 4y^2 + 2x - 2y + (2x+2y)i - 1 - 4x - 4x^2 = 0.$$

Tale eq. è equivalente al sistema $\begin{cases} 4y^2 - 2x - 2y - 1 = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$.

Si ha $\begin{cases} 4y^2 - 2x - 2y - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 4x^2 - 2x + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 = \frac{1}{4} \end{cases}.$

Le soluzioni dell'eq. data sono dunque $\underline{z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$, $\underline{z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$.

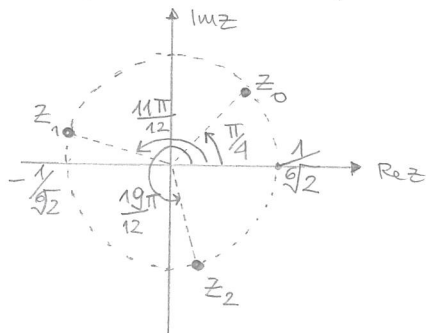


La rappresentazione grafica delle soluzioni dell'eq. data. □

ii) Sia $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. La sua forma trigonometrica è $z = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$.
Le sue radici cubiche sono $\underline{z_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})}$;

$$\underline{z_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\cos (\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}) + i \sin (\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}))} = \underline{\frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12})};$$

$$\underline{z_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\cos (\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}) + i \sin (\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}))} = \underline{\frac{1}{\sqrt[3]{2}} (\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12})}.$$



La rappresentazione grafica delle radici cubiche di z . ■

b2) Poniamo $P(n) = "n! \geq 3^{n-2}"$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

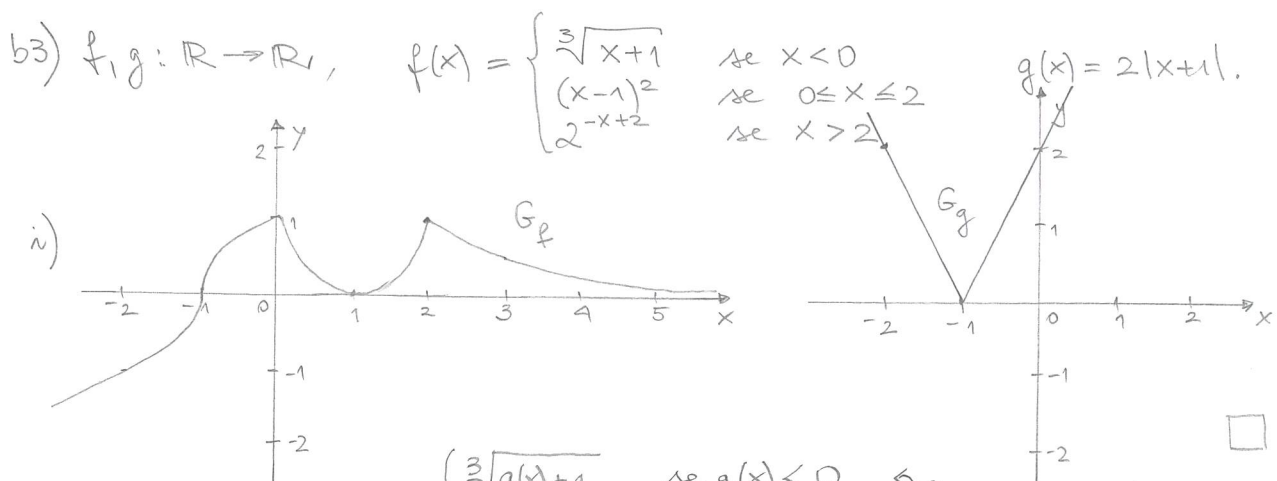
• Si ha facilmente che $P(0)$ è vero (infatti, per $n=0$, si ha $"0! = 1 \geq 3^{-2}"$).

• Vogliamo provare che $\forall n \geq 0$, supposto $P(n)$ vero, risulta $P(n+1)$ vero.

Ora $(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1) \cdot 3^{n-2}$. Abbiamo concluso se proviamo che $(n+1)3^{n-2} \geq 3^{(n+1)-2} = 3^{n-1}$. ^{ip. induttiva} Ora $(n+1)3^{n-2} \geq 3^{n-1} \Leftrightarrow n+1 \geq 3$

$\Leftrightarrow n \geq 2$. Segue quindi che il passo induttivo è verificato $\forall n \geq 2$.

Poiché $P(2)$ è vero ($2! \geq 3^0 = 1$), dal principio di induzione segue che $P(n)$ è vero $\forall n \geq 2$. D'altra parte, $P(0)$ è vero e anche $P(1)$ è vero ($1! \geq 3^{-1} = \frac{1}{3}$); quindi, in definitiva possiamo concludere che $P(n)$ è vero $\forall n \geq 0$. ▀



iii) $\underline{f \text{ non è iniettiva}}$: basta prendere, per esempio, $x_1 = -1 \neq x_2 = 1$ e $f(x_1) = f(x_2)$.

$\underline{f \text{ non è suriettiva}}$: infatti $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1] \subsetneq \mathbb{R}$.

iv) $G_{|f|}$

$x = -2, x = 0, x = 2$ pt. di max. loc. di $|f(x)|$ su $[-2, 3]$
 $x = -1, x = 1, x = 3$ pt. di min. loc. di $|f(x)|$ su $[-2, 3]$.

$$v) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x+2} \cdot 2|x+1| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8(x+1)}{2^x} = \underline{\underline{0}},$$

per la gerarchia degli infiniti. ■

$$b4) \text{ Osserviamo che } \frac{\log(1+x^k)}{(1-\cos x)^2} = \frac{\log(1+x^k)}{x^k} \cdot \frac{x^k}{(1-\cos x)^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{\log(1+x^k)}{x^k}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 0 \\ 1}} \cdot \underbrace{\left(\frac{x^2}{1-\cos x}\right)^2}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 0 \\ (2)^2}} \cdot \frac{x^k}{x^4}.$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^k)}{(1-\cos x)^2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 1 \leq k < 4 \\ 4 & \text{se } k = 4 \\ 0 & \text{se } k > 4. \end{cases}$$

$$b5) A = \{x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3(n+1)}\right) : n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}.$$

$$i) \text{ Oss. che } |x_n| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3(n+1)}\right)\right| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0. \quad \square$$

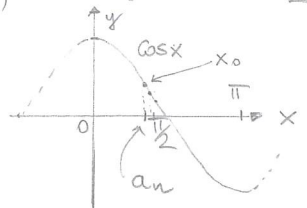
$$ii) \text{ Oss. che } a_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3(n+1)} \nearrow \frac{\pi}{2};$$

Inoltre $\cos x$ è decrescente su $[0, \pi]$;

quindi $x_n = \cos a_n$ risulta essere una succ.

decrescente su $\mathbb{N}$, $n \geq 0$. Ne segue che

$$\sup A = \max A = x_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right), \text{ mentre (teorema di Weierstrass del } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \cos \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{0}}. \text{ (non \u00e9 minimo!))}$$



$$b6) i) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ \u00e9 iniettiva se } \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$$

$$\text{ o equiv. se } \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2].$$

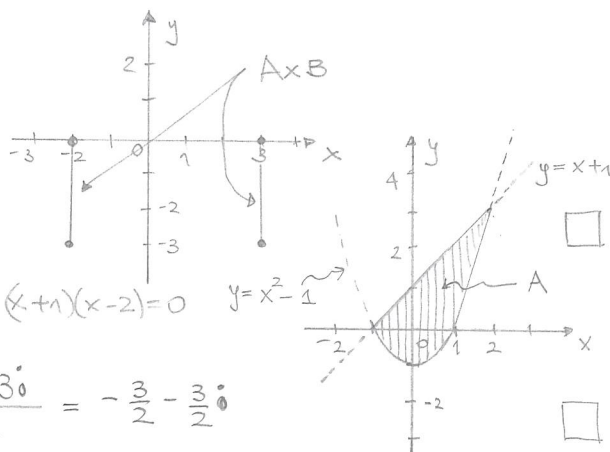
$$ii) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - 4| < \varepsilon;$$

oppure : $\forall$ intorno V di 4, $\exists$ un intorno U di 2 :

$$\forall x \in U \setminus \{2\} \Rightarrow f(x) \in V. \quad \square$$

FILA (B) a1) $A = \{-2, 3\}$, $B = [-3, 0]$



22) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}$

Nota: $x^2 - 1 = x + 1 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0$

23) $z = \frac{3}{i-1} = \frac{3}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{-3-3i}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$

$\text{Re } z = -\frac{3}{2}$ $\text{Im } z = -\frac{3}{2}$

24) $z = -2 + 2i$. Allora $z = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

Quindi $\underline{z^4} = (2\sqrt{2})^4 \left(\cos 4 \cdot \frac{3\pi}{4} + i \sin 4 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) = \underline{-(2\sqrt{2})^4}$.

25) $A =]1, +\infty[$. Allora $\inf A = 1$, ma $\nexists \min A$.

26) $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$

Allora f è continua in $x=0 \Leftrightarrow$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x+a)^2 = a^2 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \underline{a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

27) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + 5 \sin |x|$. Notiamo che $-1 \leq \sin |x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Abbiamo $-5 \leq 5 \sin |x| \leq 5$ e infine $2-5 \leq f(x) \leq 2+5$.

Risulta $\underline{\text{Im } f = f(\mathbb{R}) = [-3, 7]}$.

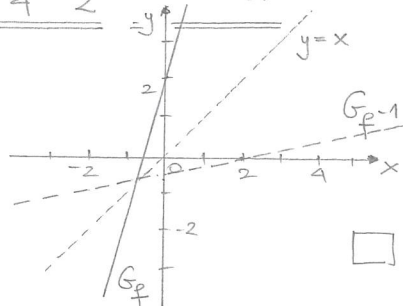
28) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x + 2$. Oss. che fissato $y \in \mathbb{R}$ mi ha $y = 4x + 2$

$\Leftrightarrow y - 2 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{y}{4} - \frac{1}{2}$. Risulta che $f^{-1}(y) = \frac{y}{4} - \frac{1}{2}$.

Operando il cambio $y \leftrightarrow x$ mi ha $\underline{f^{-1}(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$.

29) $-\frac{\pi}{2} < \arcsin(3x+1) \Leftrightarrow -1 < 3x+1 \leq 1$

$\Leftrightarrow -2 < 3x \leq 0 \Rightarrow \underline{S =]-\frac{2}{3}, 0]}$.



210) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x) =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x) \cdot \frac{(\sqrt{x^2 - 3x} + x)}{(\sqrt{x^2 - 3x} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + x} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$.

b1) i) Data l'eq. $-\bar{z} + (1+i) + \frac{(1+iz)^2}{z} = 0$, osserviamo subito che $z=0$ non è soluzione dell'eq. Moltiplicando poi l'eq. per z otteniamo l'eq. equivalente $-z\bar{z} + z(1+i) + (1+iz)^2 = 0$, ossia

$$-|z|^2 + z(1+i) + (1+iz)^2 = 0.$$

Poniamo $z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che z soddisfi quest'ultima eq. che diventa

$$-(x^2+y^2) + (x+iy)(1+i) + (1+y)^2 = 0,$$

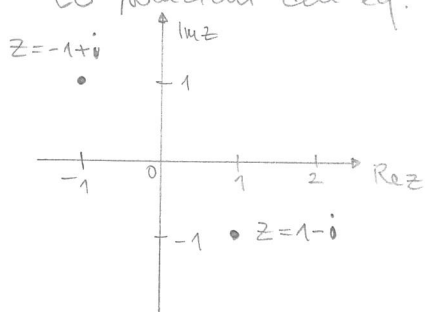
ossia

$$-x^2 - y^2 + x - y + (x+y)i + 1 + 2y + y^2 = 0.$$

Tale eq. è equivalente al sistema
$$\begin{cases} -x^2 + x + y + 1 = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

$$\text{Si ha } \begin{cases} -x^2 + x + y + 1 = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + x - x + 1 = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = -x. \end{cases}$$

Le soluzioni dell'eq. data sono dunque $\underline{z = -1+i}$, $\underline{z = 1-i}$.



La rappresentazione grafica delle soluzioni dell'eq. data.

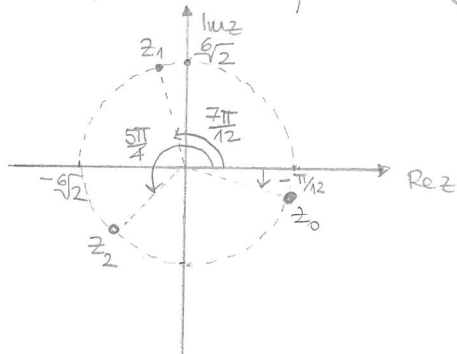
□

ii) Sia $z = 1-i$. La sua forma trigonometrica è $z = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$.

Le sue radici cubiche sono $\underline{z_0 = \sqrt[6]{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \right)}$;

$$\underline{z_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)};$$

$$\underline{z_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{15\pi}{12} + i \sin \frac{15\pi}{12} \right)}.$$



La rappresentazione grafica delle radici cubiche di z .

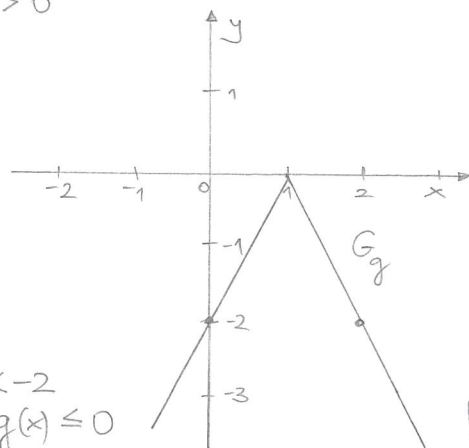
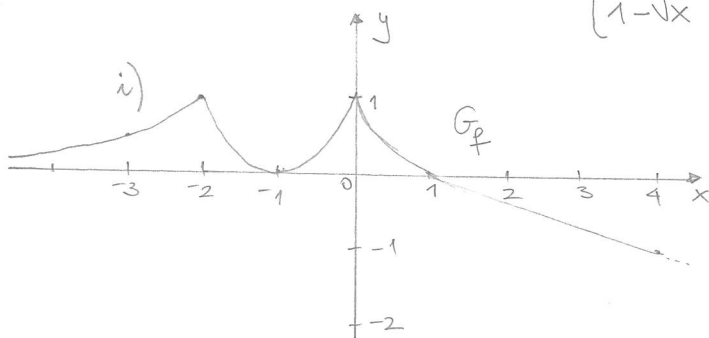
■

b2) Poniamo $P(n) = "n! \geq 4^{n-3}"$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

- Si ha facilmente che $P(0)$ è vero (infatti, per $n=0$, si ha $0! = 1 \geq 4^{-3}$).
- Vogliamo provare che $\forall n \geq 0$, supposto $P(n)$ vero, risulta $P(n+1)$ vero.

Ora $(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)4^{n-3}$. Abbiamo concluso se
 proviamo che $(n+1)4^{n-3} \geq 4^{(n+1)-3} = 4^{n-2}$. Ora $(n+1)4^{n-3} \geq 4^{n-2}$
 $\Leftrightarrow n+1 \geq 4 \Leftrightarrow n \geq 3$. Segue quindi che il passo induttivo è verificato $\forall n \geq 3$.
 Poiché $P(3)$ è vero ($3! \geq 4^0 = 1$), dal principio di induzione segue
 che $P(n)$ è vero $\forall n \geq 3$. D'altra parte, $P(0)$ è vero e anche $P(1)$ è vero
 ($1! \geq 4^{-2} = \frac{1}{16}$) e $P(2)$ è vero ($2! \geq 4^{-1} = \frac{1}{4}$); quindi, in definitiva
 possiamo concludere che $P(n)$ è vero $\forall n \geq 0$. $\blacksquare$

b3) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^{x+2} & \text{se } x < -2 \\ (x+1)^2 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ 1 - \sqrt{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $g(x) = -2|x-1|$.

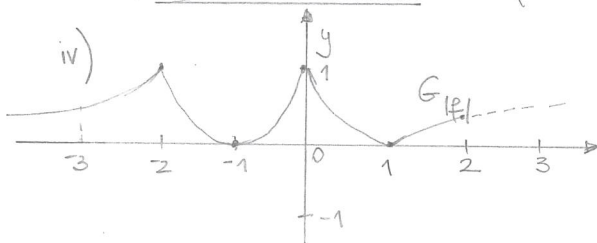


ii) $\underbrace{(f \circ g)(x)}_{x \in \mathbb{R}} = f(g(x)) = \begin{cases} 2^{g(x)+2} & \text{se } g(x) < -2 \\ (g(x)+1)^2 & \text{se } -2 \leq g(x) \leq 0 \\ 1 - \sqrt{g(x)} & \text{se } g(x) > 0 \end{cases}$ MAI!

=
 basta leggere
 dal grafico di g $\begin{cases} 2^{-2|x-1|+2} & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 2 \\ (-2|x-1|+1)^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ $\square$

iii) f non è iniettiva: basta prendere, per esempio, $x_1 = -1 \neq x_2 = 1$ e
 $f(x_1) = f(x_2)$.

f non è suriettiva: infatti $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1] \subsetneq \mathbb{R}$. $\square$



$x = -2, x = 0, x = 2$ pt. di max. loc. di $|f(x)|$ su $[-3, 2]$
 $x = -3, x = -1, x = 1$ pt. di min. loc. di $|f(x)|$ su $[-3, 2]$. $\square$

$$v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{x}}{-2|x-1|} = \underline{0}.$$

$$\begin{aligned} b4) \text{ Osserviamo che } \frac{e^{3x^2} - 1}{\ln x^k} &= \frac{e^{3x^2} - 1}{3x^2} \cdot \frac{3x^2}{\ln x^k} = \\ &= \underbrace{\frac{e^{3x^2} - 1}{3x^2}}_{\substack{\downarrow \text{ se } x \rightarrow 0 \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{x^k}{\ln x^k}}_{\substack{\downarrow \text{ se } x \rightarrow 0 \\ 1}} \cdot \frac{3x^2}{x^k}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x^2} - 1}{\ln x^k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 1 \\ 3 & \text{se } k = 2 \\ +\infty & \text{se } k > 2. \end{cases}$$

$$b5) A = \left\{ x_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2(n+1)}\right) : n \in \mathbb{N}, n \geq 0 \right\}.$$

$$i) \text{ Oss. che } |x_n| = \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2(n+1)}\right) \right| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0. \quad \square$$

$$ii) \text{ Oss. che } a_n = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2(n+1)} \downarrow \frac{\pi}{2};$$

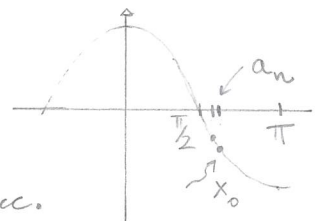
inoltre $\cos x$ è decrescente su $[0, \pi]$;

quindi $x_n = \cos a_n$ risulta essere una succ.

crescente su $\mathbb{N}$, $n \geq 0$. Ne segue che

$$\underline{\inf A} = \underline{\min A} = \underline{x_0} = \underline{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\right)}, \text{ mentre (teorema di Feuss del limite per funz. monotone)}$$

$$\underline{\sup A} = \underline{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n} = \underline{\cos \frac{\pi}{2}} = \underline{0} \quad (\text{non è massimo!})$$



b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione strett. crescente se

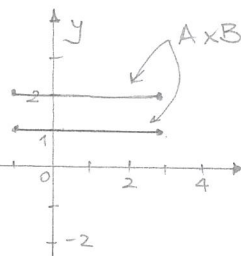
$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]. \quad \square$$

$$ii) \underline{\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty} : \forall M > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow f(x) \geq M,$$

oppure: $\forall$ intorno V di $+\infty$, $\exists$ un intorno U di 3:

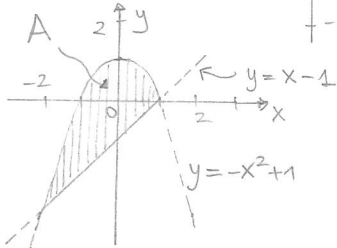
$$\forall x \in U \setminus \{3\} \Rightarrow f(x) \in V.$$

FILA C a1) $A = [-1, 3]$, $B = \{1, 2\}$.



a2) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x-1 \leq y \leq -x^2+1\}$

Nota: $x-1 = -x^2+1 \Leftrightarrow$
 $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$
 $(x+2)(x-1)=0$



a3) $z = \frac{3}{i+2} = \frac{3}{2+i} = \frac{3}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{6-3i}{5} = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$

$\operatorname{Re} z = \frac{6}{5}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{3}{5}$.

a4) $z = 2+2i$. Allora $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

Quindi $z^6 = (2\sqrt{2})^6 \left(\cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} \right) = -(2\sqrt{2})^6 i$.

a5) $A =]2, +\infty[$. Allora $\inf A = 2$, ma $\nexists \min A$.

a6) $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$

Allora f è continua in $x=0 \Leftrightarrow$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x-a)^2 = a^2 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\Leftrightarrow a = \pm 1$.

a7) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + 2 \sin |x|$. Notiamo che $-1 \leq \sin |x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Allora $-2 \leq 2 \sin |x| \leq 2$ e infine $5-2 \leq f(x) \leq 5+2$.

Risultava $\inf f = f(\mathbb{R}) = [3, 7]$.

a8) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$. Oss. che fissato $y \in \mathbb{R}$ mi ha $y = \frac{1}{2}x + 2$

$\Leftrightarrow 2y = x + 4 \Leftrightarrow x = 2y - 4$. Risultava che $f^{-1}(y) = 2y - 4$.

Operando il cambio $y \leftrightarrow x$ mi ha $f^{-1}(x) = 2x - 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

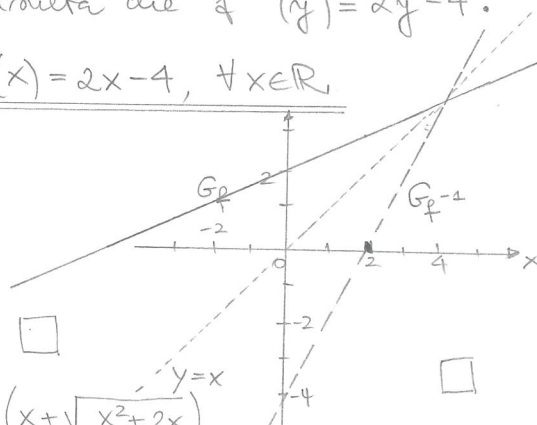
a9) $\arcsin(3x-1) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \leq 3x-1 < 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq 3x < 2$

$\Rightarrow S = [0, \frac{2}{3}[$.

a10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x}) \cdot \frac{(x + \sqrt{x^2 + 2x})}{(x + \sqrt{x^2 + 2x})} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x + x\sqrt{1 + \frac{2}{x}}} = -\frac{2}{2} = -1.$



b1) i) Dato l'eq. $2z + (1+i) - \frac{(1+2\operatorname{Re}z)^2}{2\bar{z}} = 0$, osserviamo subito che $z=0$ non è soluzione dell'eq. Moltiplicando poi l'eq. per $2\bar{z}$ otteniamo l'eq. equivalente $4z\bar{z} + 2\bar{z}(1+i) - (1+2\operatorname{Re}z)^2 = 0$, ossia

$$4|z|^2 + 2\bar{z}(1+i) - (1+2\operatorname{Re}z)^2 = 0.$$

Poniamo $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che z soddisfi quest'ultima eq. che diventa

$$4(x^2 + y^2) + 2(x - iy)(1+i) - (1+2x)^2 = 0,$$

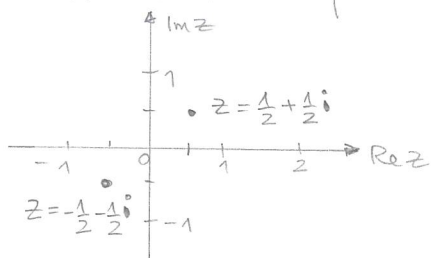
ossia

$$\cancel{4x^2} + 4y^2 + 2x + 2y + (2x - 2y)i - 1 - 4x - \cancel{4x^2} = 0.$$

Tale eq. è equivalente al sistema.
$$\begin{cases} 4y^2 - 2x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Si ha } \begin{cases} 4y^2 - 2x + 2y - 1 = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 2x + 2x - 1 = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ y = x \end{cases}$$

Le soluzioni dell'eq. data sono dunque $\underline{z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}$, $\underline{z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$.



La rappresentazione grafica delle soluzioni dell'eq. data.

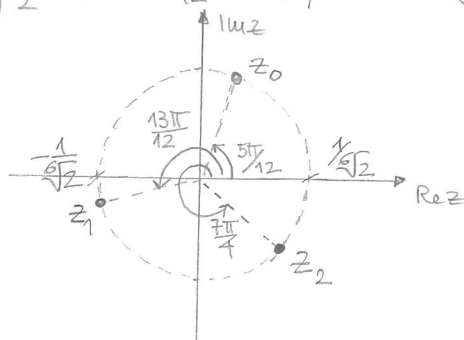


ii) Sia $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. La sua forma trigonometrica è $z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$.
Le sue radici cubiche sono $\underline{z_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)}$;

$$\underline{z_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right)};$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\cos \frac{21\pi}{12} + i \sin \frac{21\pi}{12} \right)$$

$\uparrow \frac{7\pi}{4}$ $\uparrow \frac{7\pi}{4}$



La rappresentazione grafica delle radici cubiche di z .



b2) Poniamo $P(n) = "n! \geq 5^{n-4}"$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

- Si ha facilmente che $P(0)$ è vero (infatti, per $n=0$, si ha $0! = 1 \geq 5^{-4}$).
- Vogliamo provare che $\forall n \geq 0$, supposto $P(n)$ vero, risulta $P(n+1)$ vero.

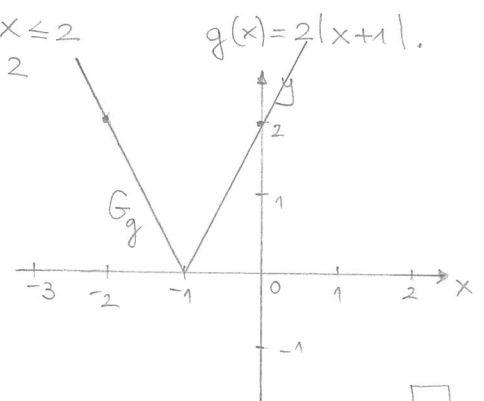
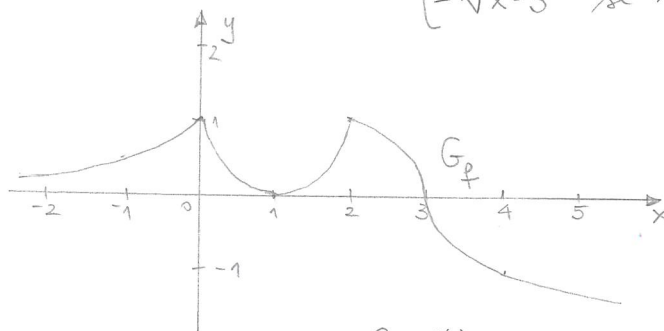
Ora $(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1) \cdot 5^{n-4}$. Abbiamo concluso se proviamo che $(n+1)5^{n-4} \geq 5^{(n+1)-4} = 5^{n-3}$. Ora $(n+1)5^{n-4} \geq 5^{n-3} \Leftrightarrow n+1 \geq 5$

$\Leftrightarrow n \geq 4$. Segue quindi che il passo induttivo è verificato $\forall n \geq 4$.

Poiché $P(4)$ è vero ($4! \geq 5^0 = 1$), dal principio di induzione segue che $P(n)$ è vero $\forall n \geq 4$. D'altra parte, $P(0)$ è vero e anche $P(1)$ è vero ($1! \geq 5^{-3} = \frac{1}{5^3}$); inoltre $P(2)$ è vero ($2! \geq 5^{-2}$) e $P(3)$ è vero ($3! \geq 5^{-1}$). Quindi, in definitiva possiamo concludere che $P(n)$ è vero $\forall n \geq 0$. ■

b3) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x < 0 \\ (x-1)^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt[3]{x-3} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

ii)

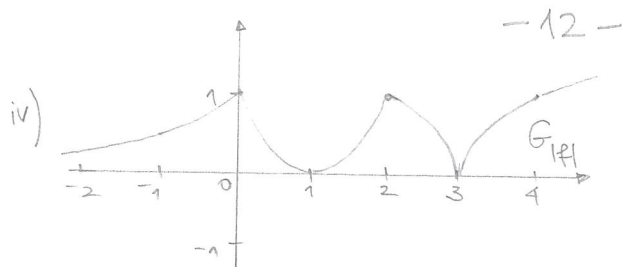


ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} 2^{g(x)} & \text{se } g(x) < 0 \\ (g(x)-1)^2 & \text{se } 0 \leq g(x) \leq 2 \\ -\sqrt[3]{g(x)-3} & \text{se } g(x) > 2 \end{cases}$ MAI!

$\begin{aligned} &= \begin{cases} (2|2x+1|-1)^2 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt[3]{2|2x+1|-3} & \text{se } x < -2 \text{ o } x > 0. \end{cases} \\ &\text{basta leggere dal grafico di } g \end{aligned}$ □

iii) f non è iniettiva: basta prendere, per esempio, $x_1 = 1 \neq x_2 = 3$ e $f(x_1) = f(x_2)$. □

f non è suriettiva: infatti $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1] \subsetneq \mathbb{R}$. □



$x=0, x=2, x=4$ pt. di max loc. di $|f(x)|$ su $[0, 4]$

$x=1, x=3$ pt. di min. loc. di $|f(x)|$ su $[0, 4]$. □

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt[3]{x-3}}{2|x+1|} = \underline{0}$. ■

b4) Osserviamo che
$$\frac{(1-\cos x)^3}{\log(1+x^k)} = \frac{x^k}{\log(1+x^k)} \cdot \frac{(1-\cos x)^3}{x^k} =$$
$$= \underbrace{\frac{x^k}{\log(1+x^k)}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 0 \\ 1}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^3}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^3}} \cdot \frac{x^6}{x^k}.$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1-\cos x)^3}{\log(1+x^k)} = \begin{cases} 0 & \text{se } 1 \leq k < 6 \\ \frac{1}{8} & \text{se } k = 6 \\ +\infty & \text{se } k > 6. \end{cases}$$
■

b5) $A = \{x_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4(n+1)}\right) : n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$ i) $|x_n| \leq 1 \quad \forall n \geq 0$. □

ii) Oss. che $a_n = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4(n+1)} \downarrow \frac{\pi}{2}$; inoltre

$\sin x$ è decrescente su $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$; quindi $x_n = \sin a_n$

risulta essere una succ. crescente su $\mathbb{N}, n \geq 0$. Ne segue che

$\inf A = \min A = x_0 = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\right)$, mentre (teorema di Jussieu del limite per funz. monotone)

$\sup A = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sin \frac{\pi}{2} = \underline{1}$. (non è massimo!) ■

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1$ è una funzione strett. decrescente se

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)].$$
□

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$: $\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x > K \Rightarrow$
 $|f(x) - 2| < \varepsilon$;

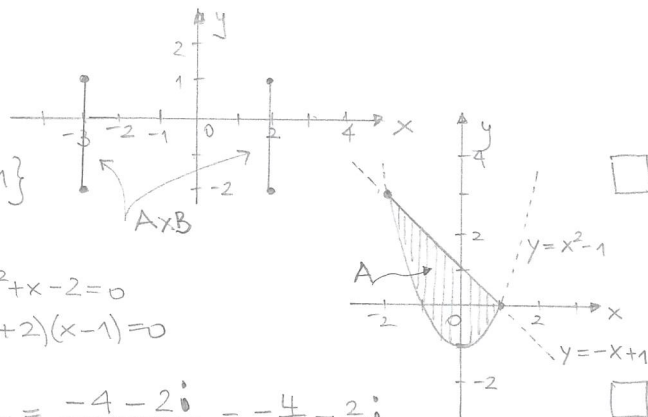
oppure: $\forall$ intorno V di 2, $\exists$ un intorno U di $+\infty$:

$$\forall x \in U \Rightarrow f(x) \in V.$$
■

FILA ① 21) $A = \{-3, 2\}$, $B = [-2, 1]$.

22) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 - 1 \leq y \leq -x + 1\}$

Nota: $x^2 - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$
 $\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0$



23) $z = \frac{2}{-2-i} = \frac{2}{-2-i} \cdot \frac{-2+i}{-2+i} = \frac{-4-2i}{5} = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$

$\text{Re } z = -\frac{4}{5}$, $\text{Im } z = -\frac{2}{5}$.

24) $z = -2 - 2i$, Allora $z = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right)$. Quindi

$\underline{z^8} = (2\sqrt{2})^8 \left(\cos\left(-8 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-8 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) \right) = (2\sqrt{2})^8$.

25) $A =]-\infty, -3[$. Allora $\sup A = -3$, ma $\nexists \max A$.

26) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ (x+a)^2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Allora f è continua in $x=0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} = f(0) = a^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+a)^2$

$\Leftrightarrow \underline{a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

27) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 + 3 \sin|x|$. Notiamo che $-1 \leq \sin|x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Abbiamo $-3 \leq 3 \sin|x| \leq 3$ e infine $4-3 \leq f(x) \leq 4+3$.

Risultato $\inf f = f(\mathbb{R}) = \underline{[1, 7]}$.

28) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 2$. Oss. che fissato $y \in \mathbb{R}$ mi ha $y = 4x - 2$

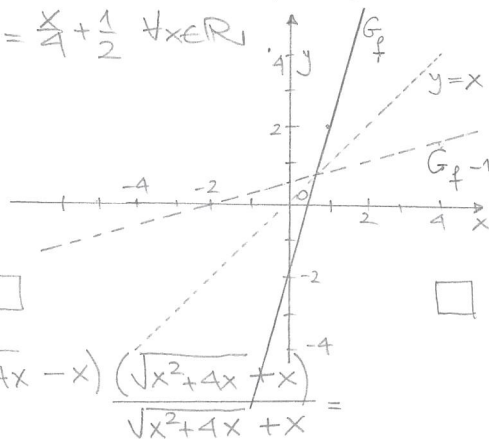
$\Leftrightarrow y + 2 = 4x \Leftrightarrow x = \frac{y}{4} + \frac{1}{2}$, e quindi $f^{-1}(y) = \frac{y}{4} + \frac{1}{2}$.

Operando il cambio $y \leftrightarrow x$ mi ha $f^{-1}(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

29) $-\frac{\pi}{2} < \arcsin(2x+1) \Leftrightarrow -1 < 2x+1 \leq 1$

$\Leftrightarrow -2 < 2x \leq 0 \Leftrightarrow -1 < x \leq 0$

$\Rightarrow \underline{S =]-1, 0]}$.



30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x) \frac{(\sqrt{x^2 + 4x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 4x} + x)} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + x} = \frac{4}{2} = \underline{2}$.

b1) i) Data l'eq. $\bar{z} + (1-i) - \frac{(1+\operatorname{Im} z)^2}{z} = 0$, osserviamo subito che $z=0$ non è soluzione dell'eq. Moltiplicando poi l'eq. per z otteniamo l'eq. equivalente $z \cdot \bar{z} + z(1-i) - (1+\operatorname{Im} z)^2 = 0$, ossia

$$|z|^2 + z(1-i) - (1+\operatorname{Im} z)^2 = 0.$$

Poniamo $z = x+iy$, con $x, y \in \mathbb{R}$ da determinare imponendo che z soddisfi quest'ultima eq. che risulta

$$x^2+y^2 + (x+iy)(1-i) - (1+y)^2 = 0,$$

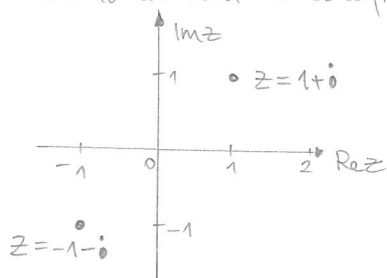
ossia

$$x^2 + x + y + (-x+y)i - 1 - 2y - y^2 = 0.$$

Tale eq. è equivalente al sistema $\begin{cases} x^2+x-y-1=0 \\ -x+y=0. \end{cases}$

$$\text{Si ha } \begin{cases} x^2+x-y-1=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-x-1=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y=x. \end{cases}$$

Le soluzioni dell'eq. data sono dunque $z = -1-i$, $z = 1+i$.



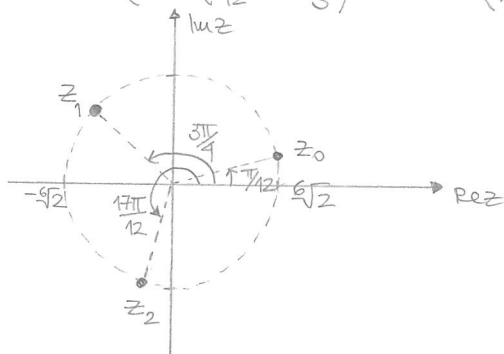
La rappresentazione grafica delle soluzioni dell'eq. data.



ii) Sia $z = 1+i$. La sua forma trigonometrica è $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.
Le sue radici cubiche sono $z_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$;

$$\underline{z_1} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{12} + i \sin \frac{3\pi}{12} \right);$$

$$\underline{z_2} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right).$$



La rappresentazione grafica delle radici cubiche di z .



b2) Poniamo $P(n) = "n! \geq 6^{n-5}"$ per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.

• Si ha facilmente che $P(0)$ è vero (infatti, per $n=0$, si ha $"0! = 1 \geq 6^{-5}"$).

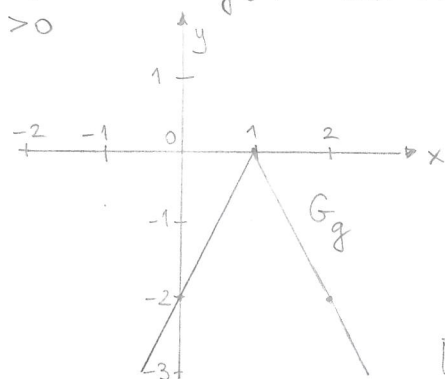
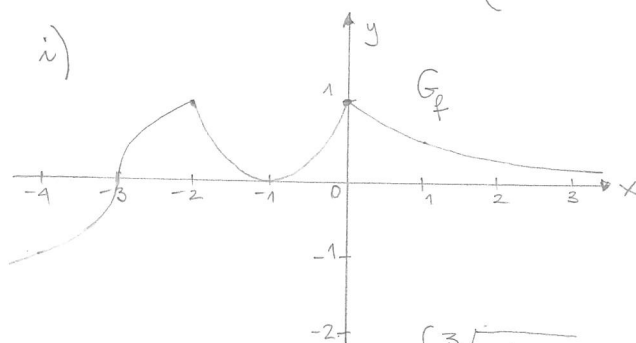
• Vogliamo provare che $\forall n \geq 0$, supposto $P(n)$ vero, risulta $P(n+1)$ vero.

Ora $(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)6^{n-5}$. Abbiamo concluso se proviamo che $(n+1)6^{n-5} \geq 6^{(n+1)-5} = 6^{n-4}$. Ora $(n+1)6^{n-5} \geq 6^{n-4} \Leftrightarrow n+1 \geq 6 \Leftrightarrow n \geq 5$.

Segue quindi il passo induttivo è verificato $\forall n \geq 5$.

Poiché $P(5)$ è vero ($5! \geq 6^0 = 1$), dal principio di induzione segue che $P(n)$ è vero $\forall n \geq 5$. D'altra parte si verifica facilmente che $P(1), P(2), P(3)$ e $P(4)$ è vero; quindi, in definitiva possiamo concludere che $P(n)$ è vero $\forall n \geq 0$. $\square$

b3) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+3} & \text{se } x < -2 \\ (x+1)^2 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ 2^{-x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$ $g(x) = -2|x-1|$.

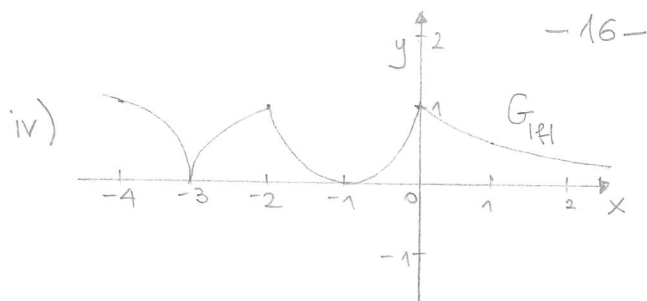


ii) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} \sqrt[3]{g(x)+3} & \text{se } g(x) < -2 \\ (g(x)+1)^2 & \text{se } -2 \leq g(x) \leq 0 \\ 2^{-g(x)} & \text{se } g(x) > 0 \end{cases}$ $\leftarrow \text{MAI!}$

$\stackrel{\text{basta leggere dal grafico di } g}{=} \begin{cases} \sqrt[3]{-2|x-1|+3} & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 2 \\ (-2|x-1|+1)^2 & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$ $\square$

iii) f non è iniettiva: basta prendere, per esempio, $x_1 = -3 \neq x_2 = -1$ e $f(x_1) = f(x_2)$.

f non è suriettiva: infatti $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 1] \subsetneq \mathbb{R}$. $\square$



$x = -4, x = -2, x = 0$ pt. di max. loc.
di $|f(x)|$ su $[-4, 1]$

$x = -3, x = -1, x = 1$ pt. di min. loc.
di $|f(x)|$ su $[-4, 1]$. □

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x}(-2|x-1|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2|x-1|}{2^x} = 0$ per la
gerarchia degli infiniti. ■

b4) Osserviamo che $\frac{\sin x^k}{e^{2x^3} - 1} = \frac{\sin x^k}{x^k} \cdot \frac{x^k}{e^{2x^3} - 1} =$

$$= \underbrace{\frac{\sin x^k}{x^k}}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 0 \\ 1}} \cdot \frac{2x^3}{\underbrace{e^{2x^3} - 1}_{\substack{\downarrow x \rightarrow 0 \\ 1}}} \cdot \frac{x^k}{2x^3}.$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x^k}{e^{2x^3} - 1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 1 \leq k < 3 \\ \frac{1}{2} & \text{se } k = 3 \\ 0 & \text{se } k > 3 \end{cases}$$
■

b5) $A = \{x_n = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2(n+1)}) : n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$ i) Abbiamo $|x_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$. □

ii) Oss. che $a_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2(n+1)} \nearrow \frac{\pi}{2}$;

inoltre $\sin x$ è crescente su $[0, \frac{\pi}{2}]$; quindi

$x_n = \sin a_n$ risulta essere una succ. crescente

su $\mathbb{N}, n \geq 0$. Ne segue che $\inf A = \min A = x_0 = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2})$;

mentre $\sup A = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ (teorema di Jensen del limite
per funz. monotone)
(non è massimo!) ■

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è suriettiva se $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, ossia $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$. □

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$: $\forall M < 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-2| < \delta$

$$\Rightarrow f(x) \leq M;$$

oppure : $\forall$ intorno V di $-\infty$, $\exists$ un intorno U di 2 :

$$\forall x \in U \setminus \{2\} \Rightarrow f(x) \in V. \quad \blacksquare$$