

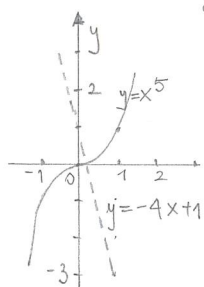
Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ingegneria dell'Informazione e delle Comunicazioni
 CdL in Ingegneria dell'Informazione e Organizzazione d'Impresa
 SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2018-2019 - Trento, 21 dicembre 2018

FILA (A)

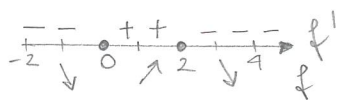
a1) $f(x) = (x^2 + \sin x) \arctg 2x$ $f'(x) = (2x + \cos x) \arctg 2x + (x^2 + \sin x) \cdot \frac{2}{1+4x^2}$ $\square$

a2) È vera o no l'affermazione $\sin x = x + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$. $\square$

a3) $x^5 = -4x + 1$ ha un'unica soluzione in $[0, 1]$ $\Leftrightarrow$ la funzione $f(x) = x^5 + 4x - 1$ ha un unico zero in $[0, 1]$. Oss. che $f(x)$ è continua in $[0, 1]$, $f(0) = -1 (< 0)$, $f(1) = 4 (> 0)$. Per il teorema di Jensen degli zeri $\exists x_0 \in]0, 1[$ t.c. $f(x_0) = 0$. Essendo f strett. crescente ($x^5 \uparrow, 4x - 1 \uparrow \Rightarrow f(x) \uparrow$), x_0 è unico. $\square$



a4) $f(x) = x^2 e^{-x}$ su $\mathbb{R}$, per cui $f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$ sono i pt. critici di f



$x = 0$ pt. di min. loc. (stretta per f);

$x = 2$ pt. di max. loc. (stretto per f). $\square$

a5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \log(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$. $\square$

a6) $f(x) = \sin(x - x^2)$: $\sin(x - x^2) = (x - x^2) - \frac{1}{3!}(x - x^2)^3 + o((x - x^2)^3)$ per $x \rightarrow 0$
 $= x - x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

$\Rightarrow P_3(x) = x - x^2 - \frac{1}{6}x^3$ è il polinomio di Taylor ricercato. $\square$

a7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2 3^n}{n!} \right)$ Abbaziamo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2 3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = l (< 1)$

Per il criterio del rapporto segue che la serie data è convergente. $\square$

a8) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x \cos x dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{1}{3}$. $\square$

a9) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^\alpha} dx$ Oss. che $f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ per $x \rightarrow +\infty$.
 L'integrale improprio dato è converg. $\Leftrightarrow \alpha - \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{3}{2}$. $\square$

a10) $f(x) = \frac{10x}{3+5x^2}$: Una primitiva di $f(x)$ è $F(x) = \log(3+5x^2)$. $\square$

b1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} ae^{-x} + bx & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\sin 2x}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$

i) Dobbiamo determinare a t.c. $f(x)$ risulti continua in $x=0$, ossia

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0). \text{ Notiamo che } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{2x} = 2,$$

$$\text{mentre } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [ae^{-x} + bx] = a = f(0). \text{ Quindi } f \text{ \u00e9 continua}$$

$$\text{in } x=0 \Leftrightarrow \underline{a=2.}$$

□

ii) Abbiamo $f(x) = \begin{cases} 2e^{-x} + bx & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\sin 2x}{x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$

La funzione \u00e9 chiaramente derivabile in ogni $x \neq 0$ con

$$f'(x) = \begin{cases} -2e^{-x} + b & \text{se } x < 0 \\ \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Per studiare la derivabilit\u00e0 in $x=0$, calcoliamo il limite per $x \rightarrow 0$ della funzione $f'(x)$. Per un coll. di de L'H\u00f4pital^(*), se tale limite esiste ed \u00e9 uguale a $l \in \mathbb{R}$, allora f \u00e9 derivabile in 0 e $f'(0) = l$. Poich\u00e9

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -2 + b, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x(1 - \frac{4x^2}{2} + o(x^2)) - \sin 2x}{x^2} = 0,$$

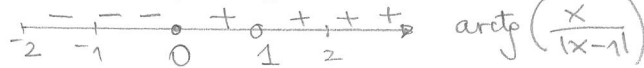
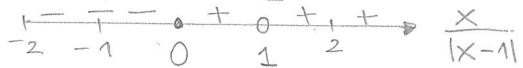
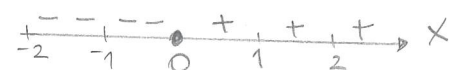
vediamo che f \u00e9 derivabile in $x=0 \Leftrightarrow -2 + b = 0 \Leftrightarrow \underline{b=2}$. In definitiva, f \u00e9 continua e derivabile in $x=0 \Leftrightarrow a=2, b=2$ e $\underline{f'(0)=0}$. □

iii) Poich\u00e9 integrando per parti si ha che $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c, c \in \mathbb{R}$, otteniamo $\int_{-3}^0 x f(x) dx = 2 \int_{-3}^0 [x e^{-x} + x^2] dx = 2 [-x e^{-x} - e^{-x} + \frac{x^3}{3}]_{-3}^0 = 2 [(-1) - (3e^3 - e^3 - 9)] = \underline{16 - 4e^3}$. ■

b2) $f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{|x-1|} \right)$ i) • $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \underline{[-\infty, 1[\cup]1, +\infty]}$

• nessuna simmetria evidente

• segno di f



($\operatorname{arctg} g(x)$ ha il segno di $g(x)$)

(*) ricordare che f \u00e9 continua in $x=0$.

- comportamento agli estremi del dominio; oss. che $f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x}{-x+1}\right) & \text{se } x < 1 \\ \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan\left(\frac{x}{-x+1}\right) = \arctan(-1) = \underline{\underline{-\frac{\pi}{4}}}$$

$\Rightarrow y = -\frac{\pi}{4}$ è asintoto orizz. per $x \rightarrow -\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{\overset{\nearrow 1}{x}}{\underset{\text{infinitesimo positivo}}{-x+1}}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan\left(\frac{\overset{\nearrow 1}{x}}{\underset{\text{infinitesimo positivo}}{x-1}}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = \arctan 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}};$$

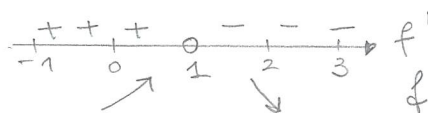
$\Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizz. per $x \rightarrow +\infty$.

- $\text{dom } f' = \text{dom } f$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{-x+1}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{-x+1}\right)' & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{x-1}\right)' & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

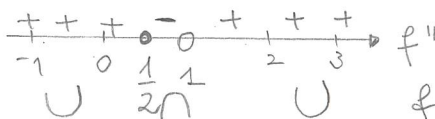
$$= \begin{cases} \frac{(-x+1)^2}{(-x+1)^2 + x^2} \cdot \frac{-(-x+1) + x}{(-x+1)^2} & \text{se } x < 1 \\ \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + x^2} \cdot \frac{(x-1) - x}{(x-1)^2} & \text{se } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{(-x+1)^2 + x^2} & \text{se } x < 1 \\ \frac{-1}{(x-1)^2 + x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

f non ha pt. critici.



- $\text{dom } f'' = \text{dom } f$ e

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-(2(-x+1)(-1) + 2x)}{(((-x+1)^2 + x^2)^2)} & \text{se } x < 1 \\ \frac{(2(x-1) + 2x)}{((x-1)^2 + x^2)^2} & \text{se } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-4x+2}{(((-x+1)^2 + x^2)^2)} & \text{se } x < 1 \\ \frac{4x-2}{((x-1)^2 + x^2)^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



$x = \frac{1}{2}$ pt. di flesso

Risulta $f\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \underline{\underline{-\frac{\pi}{4}}}$.

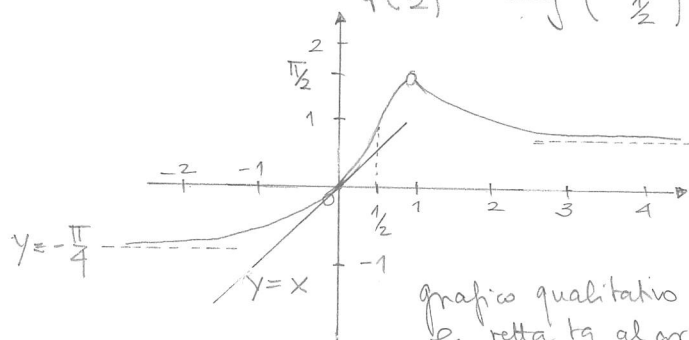


grafico qualitativo di f
e retta tg al grafico di f in $(0,0)$.

- ii) L'eq. della retta tg al grafico di f in $(0,0)$ è $y = 0 + 1(x-0)$ ossia

$$\underline{\underline{y=x.}}$$



b3) Bisogna sviluppare il numeratore almeno fino al quarto ordine; ricordando che $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \rightarrow 0$ e $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} \log(1+x^2) - (e^x - 1)^2 &= x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \left(x^2 + x^3 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + o(x^4)\right) \\ &= -x^3 - \frac{13}{12}x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^2) - (e^x - 1)^2 + x^\alpha}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3 - \frac{13}{12}x^4 + o(x^4) + x^\alpha}{x^4} = \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 3 \\ -\frac{13}{12} & \text{se } \alpha = 3 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

b4) i) Ricordando che $\sin x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, possiamo asserire

$$0 < \frac{\sin \frac{1}{n^{2\alpha}}}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{\frac{1}{n^{2\alpha}}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{2\alpha + \frac{1}{2}}} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\beta} < +\infty \Leftrightarrow \beta > 1$, si ha che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha + \frac{1}{2}}} < +\infty \Leftrightarrow 2\alpha + \frac{1}{2} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{4}$.

Per il criterio del confronto asintotico si conclude che la serie data $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{n^{2\alpha}}}{\sqrt{n+1}}$ è convergente se e solo se $\alpha > \frac{1}{4}$. $\square$

ii) Poniamo $a_n = \frac{e^n}{\sqrt{n+1}} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Vogliamo applicare il criterio del rapporto per determinare il raggio di convergenza della serie di potenze data. Abbiamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{\sqrt{n+1+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e. \quad \text{Quindi il raggio di}$$

convergenza della serie è $\underline{r = \frac{1}{e}}$. Possiamo allora asserire che la serie è convergente $\forall x \in]2 - \frac{1}{e}, 2 + \frac{1}{e}[$. Dobbiamo ancora controllare la convergenza o meno nei pt. $x = 2 - \frac{1}{e}$ e $x = 2 + \frac{1}{e}$.

In $x = 2 + \frac{1}{e}$, la serie risulta $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{e^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ che è divergente per il confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

In $x = 2 - \frac{1}{e}$, la serie risulta $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{\sqrt{n+1}} \frac{(-1)^n}{e^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
Abbiamo dunque una serie a segni alterni. Poiché
 $a_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, e $a_n \searrow$, per il criterio di Leibniz la
serie data è convergente.

Quindi, in definitiva, l'intervallo di convergenza della serie data è
 $E = [2 - \frac{1}{e}, 2 + \frac{1}{e}]$. ■

b5) $\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x^{5/2}}}_{f(x)} dx$ $f(x) :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continua, $f(x) > 0$.
Notiamo che (ricordare $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, per $x \rightarrow 0$)
per $x \rightarrow 0^+$ $f(x) \sim \frac{x^2}{2x^{5/2}} = \frac{1}{2x^{1/2}}$.

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx < +\infty$, per il criterio del confronto asintotico
anche $\int_0^1 f(x) dx$ risulta convergente. D'altra parte, possiamo

osservare che $0 < f(x) < \frac{2}{x^{5/2}} \quad \forall x > 0$.

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^{5/2}} dx < +\infty$, per il criterio del confronto si ha
che anche $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ risulta convergente.

In definitiva possiamo allora concludere che $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^{5/2}} dx$ è convergente. ■

b6) i) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice convergente se la succ. delle somme parziali
 $\{s_n\}_n$ ammette limite finito. □

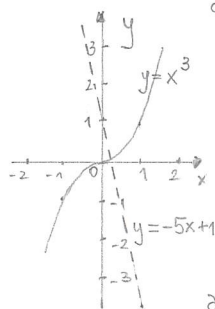
ii) Enunciato e dim. del teorema di Rolle.

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, f derivabile in $]a, b[$ e
 $f(a) = f(b)$. Allora $\exists c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$. ■

FILA (B) a1) $f(x) = (3x + \sin x) \log(1+2x)$ $f'(x) = (3 + \cos x) \log(1+2x) + \frac{(3x + \sin x) \cdot 2}{(1+2x)}$ $\square$

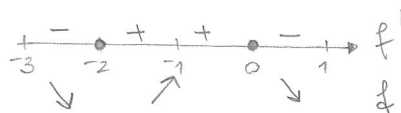
a2) È vera solo l'affermazione $\cos x = 1 + o(x)$ per $x \rightarrow 0$. $\square$

a3) $x^3 = -5x + 1$ ha un'unica soluzione in $[0,1]$ $\Leftrightarrow$ la funzione $f(x) = x^3 + 5x - 1$ ha un unico zero in $[0,1]$, oss. che $f(x)$ è continua in $[0,1]$, $f(0) = -1 (< 0)$, $f(1) = 5 (> 0)$. Per il teorema di Jena degli zeri $\exists x_0 \in]0,1[$ t.c. $f(x_0) = 0$. Essendo f strett. crescente ($x^3 \uparrow, 5x - 1 \uparrow \Rightarrow f(x) \uparrow$), x_0 è unico. $\square$



a4) $f(x) = -x^2 e^x$ su $\mathbb{R}$, per cui $f'(x) = -2x e^x - x^2 e^x = e^x (-x^2 - 2x)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 0$ sono i pt. critici di f .



$x = -2$ pt. di min. loc. stretto per f ;

$x = 0$ pt. di max. loc. stretto per f . $\square$

a5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \log(1+x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\square$

a6) $f(x) = \cos(x - x^2)$: $\cos(x - x^2) = 1 - \frac{1}{2}(x - x^2)^2 + \frac{1}{4!}(x - x^2)^4 + o((x - x^2)^4)$ per $x \rightarrow 0$
 $= 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

$\Rightarrow P_3(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3$ è il polinomio di Taylor ricercato. $\square$

a7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n!}{n^3 2^n} \right) = a_n > 0$ Abbiamo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^3 2^{n+1}} \cdot \frac{n^3 2^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty = l (> 1)$

Per il criterio del rapporto segue che la serie data è positiv. divergente. $\square$

a8) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$ $\square$

a9) $\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^\alpha} \right) dx$ Oss. che $f(x) \sim \frac{\sqrt[3]{x}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha - 1/3}}$ per $x \rightarrow +\infty$.

L'integrale improprio data è convergente $\Leftrightarrow \alpha - \frac{1}{3} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{4}{3}$. $\square$

a10) $f(x) = \frac{6x}{3x^2 + 5}$: una primitiva di $f(x)$ è $F(x) = \log(3x^2 + 5)$. $\square$

b1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x} & \text{se } x < 0 \\ ae^{-x} - bx & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

i) Dobbiamo determinare a t.c. $f(x)$ risulta continua in $x=0$, ossia $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Notiamo che $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 3x}{3x} = 3$, mentre

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [ae^{-x} - bx] = a = f(0)$. Quindi f è continua in $x=0$ se e solo se $a=3$. □

ii) Abbiamo $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x} & \text{se } x < 0 \\ 3e^{-x} - bx & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

La funzione è chiaramente derivabile in ogni $x \neq 0$ con

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3x \cos 3x - \sin 3x}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ -3e^{-x} - b & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Per studiare la derivabilità in $x=0$, calcoliamo il limite per $x \rightarrow 0$ della funzione $f'(x)$. Ricordando che f è continua in $x=0$, per un corollario di de l'Hôpital, se tale limite esiste ed è uguale a $l \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile in 0 e $f'(0) = l$. Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -3 - b, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)) - \sin 3x}{x^2} = 0,$$

vediamo che f è derivabile in $x=0 \Leftrightarrow -3-b=0 \Leftrightarrow \underline{b=-3}$. In definitiva, f è continua e derivabile in $x=0 \Leftrightarrow a=3, b=-3$ e $f'(0)=0$ □

iii) Poiché integrando per parti si ha $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c$, $c \in \mathbb{R}$, otteniamo

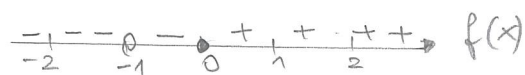
$$\int_0^3 x f(x) dx = 3 \int_0^3 [x e^{-x} + x^2] dx = 3 \left[-x e^{-x} - e^{-x} + \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 3 \left[(-3e^{-3} - e^{-3} + 9) - (-1) \right] = \underline{30 - 12e^{-3}}. \quad \blacksquare$$

b2) $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{1x+1}\right)$

i) • $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = \underline{\underline{]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[}}$

• nessuna simmetria evidente

• segno di f



- Comportamento agli estremi del dominio: oss. che $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{-x-1}\right) & \text{se } x < -1 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right) & \text{se } x > -1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{-x-1}\right) = \operatorname{arctg}(-1) = \underline{\underline{-\frac{\pi}{4}}}$$

$\Rightarrow y = -\frac{\pi}{4}$ è asintoto orizz. per f , per $x \rightarrow -\infty$;

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{\overset{\nearrow -1}{x}}{\underset{\substack{\nearrow -1 \\ \text{infinit. positivo}}}{-x-1}}\right) = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{\overset{\nearrow -1}{x}}{\underset{\substack{\nearrow -1 \\ \text{infinit. positivo}}}{x+1}}\right) = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};$$

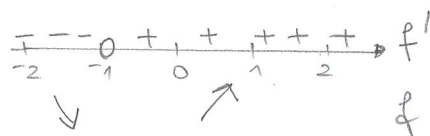
$\Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizz. per f , per $x \rightarrow +\infty$.

- $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{-x-1}\right)^2} \cdot \frac{(-x-1) + x}{(-x-1)^2} & \text{se } x < -1 \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{-1}{(-x-1)^2 + x^2} & \text{se } x < -1 \\ \frac{1}{(x+1)^2 + x^2} & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

f non ha punti critici



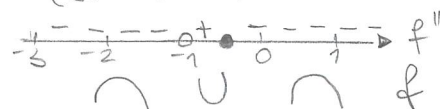
- $\operatorname{dom} f'' = \operatorname{dom} f$ e

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(-x-1)(-1) + 2x}{((x+1)^2 + x^2)^2} & \text{se } x < -1 \\ \frac{-(2(x+1) + 2x)}{((x+1)^2 + x^2)^2} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{4x+2}{((x+1)^2 + x^2)^2} & \text{se } x < -1 \\ \frac{-4x-2}{((x+1)^2 + x^2)^2} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

$x = -\frac{1}{2}$ pt. di flesso.

Risulta $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$.



- ii) L'eq. della retta tg al grafico di f in $(0,0)$ è $y = 0 + 1(x-0)$, ossia $y = x$.

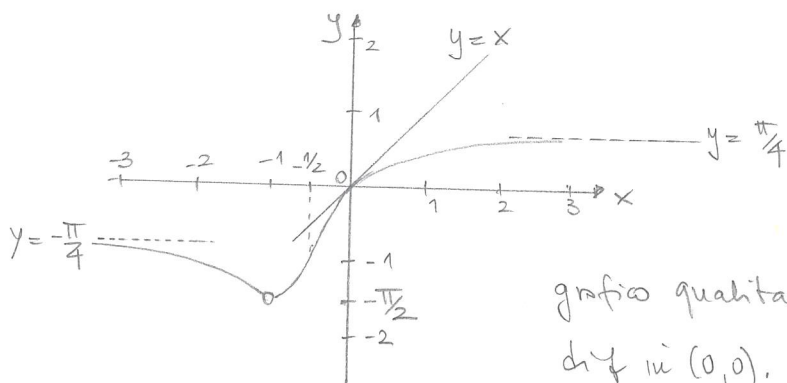


grafico qualitativo di f e retta $tg.$ al grafico di f in $(0,0)$. ■

b3) Bisogna sviluppare il numeratore almeno fino al quarto ordine; ricordando che $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \rightarrow 0$ e $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} \log(1-x^2) + (e^x - 1)^2 &= -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 \\ &= -x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) + x^2 + x^3 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + o(x^4) \\ &= x^3 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1-x^2) + (e^x - 1)^2 - x^\alpha}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) - x^\alpha}{x^4} = \\ &= \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha < 3 \\ \frac{1}{12} & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

b4) i) Ricordando che $\text{arctg } x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, possiamo afferire che

$$0 < \frac{\text{arctg } \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n+1} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\beta} < +\infty \iff \beta > 1$, si ha che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3\alpha+1/2}} < +\infty \iff 3\alpha+1/2 > 1 \iff \alpha > \frac{1}{6}$. Per il criterio del confronto asintotico si conclude che la serie data $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{arctg } \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}}$ è convergente se e solo se $\alpha > \frac{1}{6}$. □

ii) Poniamo $a_n = \frac{e^n}{\sqrt{n+2}} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Vogliamo applicare il criterio del rapporto per determinare il raggio di convergenza delle serie di potenze data. Abbiamo $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{\sqrt{n+3}} \cdot \frac{\sqrt{n+2}}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$. Quindi il raggio

di convergenza della serie è $r = \frac{1}{e}$. Possiamo allora asserire che la serie è convergente $\forall x \in]3 - \frac{1}{e}, 3 + \frac{1}{e}[$. Rimane da controllare la convergenza o meno nei pt. $x = 3 - \frac{1}{e}$ e $x = 3 + \frac{1}{e}$.

In $x = 3 + \frac{1}{e}$, la serie risulta $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{1}{e^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ che è divergente per il confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

In $x = 3 - \frac{1}{e}$, la serie risulta $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{\sqrt{n+2}} \cdot \frac{(-1)^n}{e^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$.

Abbiamo dunque una serie a segni alterni. Poiché $a_n \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $a_n \downarrow$, per il criterio di Leibniz la serie data è convergente.

Quindi, in definitiva, l'insieme di convergenza della serie data è $E = [3 - \frac{1}{e}, 3 + \frac{1}{e}[$.

b5) $\int_0^{+\infty} \frac{x - \min x}{x^{7/2}} dx$ $f(x):]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continua, $f(x) > 0$.

Notiamo che (ricordare $\min x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, per $x \rightarrow 0$)

$$\text{per } x \rightarrow 0^+ \quad f(x) \sim \frac{x^3}{6 x^{7/2}} = \frac{1}{6 x^{1/2}}.$$

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx < +\infty$, per il criterio del confronto asintotico anche $\int_0^1 f(x) dx$ risulta convergente. D'altra parte possiamo osservare che

$$0 < f(x) < \frac{x+1}{x^{7/2}} \leq \frac{2x}{x^{7/2}} \quad \forall x > 1. \text{ Poiché } \int_1^{+\infty} \frac{2}{x^{5/2}} dx < +\infty,$$

per il criterio del confronto anche $\int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty$. In definitiva, possiamo allora asserire che $\int_0^{+\infty} \frac{x - \min x}{x^{7/2}} dx$ è convergente.

b6) i) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se è convergente la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

ii) Enunciato e dim. del teorema di Lagrange.

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, f derivabile in $]a, b[$. Allora $\exists c \in]a, b[$ tale che $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.