

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

A

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E DELLE COMUNICAZIONI

CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E ORGANIZZAZIONE D'IMPRESA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2018-2019 — TRENTO, 10 GENNAIO 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.

È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Non usate il colore rosso.

a1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| < 1\}$. Determinate A . Determinate $\inf A$ e $\sup A$.

Risposta:

a2) Scrivete in forma algebrica il numero complesso $z = \frac{3i}{2-i}$.

Risposta:

a3) Rappresentate graficamente l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 3\}$.

Risposta:

a4) Determinate l'immagine della funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} 1 + x^3 & \text{se } x < 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Risposta:

a5) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = 2x + e^x$. Calcolate $(f^{-1})'(1)$.

Risposta:

a6) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $f(x) = e^{2x} - 2x$.

Risposta:

a7) Sia $F(x) = \int_0^x (e^{-t} - 1) dt$. Determinate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2}$.

Risposta:

a8) Determinate gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che risulti convergente la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (2\alpha - 1)^n$.

Risposta:

a9) Calcolate $\int_0^3 |x - 1| dx$.

Risposta:

a10) Determinate l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y'' = x + 1$.

Risposta:

b1) i) Risolvete in \mathbb{C} l'equazione

a) $w^2 - 3\bar{w} = 0,$

determinate il modulo delle soluzioni, e rappresentatele nel piano di Gauss.

ii) Risolvete in \mathbb{C} l'equazione

b) $z^3 = 27.$

iii) Trovate qualche analogia tra le soluzioni di a) e quelle di b)?

b2) Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 2|x+1| - 2 & \text{se } x \leq 0 \\ \log(1+x) & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \sin x.$$

i) Tracciate un grafico qualitativo delle funzioni f e g .

ii) Dite se f è iniettiva e/o suriettiva (motivando le risposte).

iii) Considerando $f(x)$ su $[-1, 1]$, sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Weierstrass?

iv) Determinate l'espressione della funzione composta $(f \circ g)(x)$, dopo aver determinato il suo dominio.

b3) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura) la funzione

$$f(x) = \frac{x|x| + 3}{|x| + 1}.$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

ii) Calcolate $\int_1^3 f(x) dx$.

iii) Tracciate un grafico qualitativo della funzione $g(x) = \log f(x)$.

b4) Determinate gli $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ tali che risulti convergente

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{(e^{x^\alpha} - 1)(1 + x^2)} dx.$$

b5) Risolvete il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x}y + x \sin x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

b6) i) La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice derivabile in $x_0 = 1$ se

ii) Provate che l'equazione $x^2 = 2$ non ha una soluzione in \mathbb{Q} , ossia che $\sqrt{2}$ è irrazionale.

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

B

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CdL IN INFORMATICA - CdL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E DELLE COMUNICAZIONI

CdL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E ORGANIZZAZIONE D'IMPRESA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2018-2019 — TRENTO, 10 GENNAIO 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.

È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Non usate il colore rosso.

a1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < 2\}$. Determinate A . Determinate $\inf A$ e $\sup A$.

Risposta:

a2) Scrivete in forma algebrica il numero complesso $z = \frac{4i}{1+i}$.

Risposta:

a3) Rappresentate graficamente l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq y \leq -x^2 + 1\}$.

Risposta:

a4) Determinate l'immagine della funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x < 0 \\ 2^{-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Risposta:

a5) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x + 2e^x$. Calcolate $(f^{-1})'(2)$.

Risposta:

a6) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $f(x) = e^{-x} - x$.

Risposta:

a7) Sia $F(x) = \int_0^x (e^{3t} - 1) dt$. Determinate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2}$.

Risposta:

a8) Determinate gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che risulti convergente la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (3\alpha - 1)^n$.

Risposta:

a9) Calcolate $\int_1^4 |x - 2| dx$.

Risposta:

a10) Determinate l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y'' = x - 1$.

Risposta:

b1) i) Risolvete in \mathbb{C} l'equazione

a) $w^2 - 2\bar{w} = 0$

determinate il modulo delle soluzioni, e rappresentatele nel piano di Gauss.

ii) Risolvete in \mathbb{C} l'equazione

b) $z^3 = 8$.

iii) Trovate qualche analogia tra le soluzioni di a) e quelle di b)?

b2) Siano $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -2|x+1| + 2 & \text{se } x \leq 0 \\ \log(1+x) & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \cos x.$$

i) Tracciate un grafico qualitativo delle funzioni f e g .

ii) Dite se f è iniettiva e/o suriettiva (motivando le risposte).

iii) Considerando $f(x)$ su $[-1, 1]$, sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Weierstrass?

iv) Determinate l'espressione della funzione composta $(f \circ g)(x)$, dopo aver determinato il suo dominio.

b3) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura) la funzione

$$f(x) = \frac{x|x| - 3}{|x| + 1}.$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

ii) Calcolate $\int_1^3 f(x) dx$.

iii) Tracciate un grafico qualitativo della funzione $g(x) = e^{f(x)}$.

b4) Determinate gli $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ tali che risulti convergente

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2) \log(1+x^\alpha)} dx.$$

b5) Risolvete il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x}y + x \cos x \\ y(\pi) = 1. \end{cases}$$

b6) i) La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice derivabile in $x_0 = 2$ se

ii) Provate che l'equazione $x^2 = 2$ non ha una soluzione in \mathbb{Q} , ossia che $\sqrt{2}$ è irrazionale.