

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CdL IN INFORMATICA - CdL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E DELLE COMUNICAZIONI

CdL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E ORGANIZZAZIONE D'IMPRESA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2018-2019 — TRENTO, 31 GENNAIO 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.

È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Non usate il colore rosso.

a1) Sia $A = \left\{ x_n = -\frac{1}{n^2 + 2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 0 \right\}$. Determinate $\inf A$ e $\sup A$.

Risposta:

a2) Determinate l'argomento principale del numero complesso $z = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$.

Risposta:

a3) Risolvete la disequazione $\log(2 - x) < 0$.

Risposta:

a4) Determinate per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $4 \arctan x = k$ ha una soluzione in \mathbb{R} .

Risposta:

a5) Calcolate $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x^3 - \sqrt{x+1}}{e^{-x} + \sqrt{x}}$.

Risposta:

a6) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -2 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$. Determinate l'espressione della funzione composta $(g \circ f)(x)$.

Risposta:

a7) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $f(x) = \log(1 + x + x^2)$.

Risposta:

a8) Determinate l'intervallo in cui $f(x) = x^2 - 2x^3$ risulta concava.

Risposta:

a9) Determinate il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n2^n}$.

Risposta:

a10) Determinate $\int 2x \log x \, dx$.

Risposta:

b1) Sia A l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ soddisfacenti il sistema

$$\begin{cases} |z - i| \leq |z - 1| \\ 1 \leq |z| \leq 2. \end{cases}$$

- i) Individuate A e rappresentatelo nel piano di Gauss.
- ii) Verificate che $z_0 = 1 + \sqrt{3}i \in A$.
- iii) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

$$-z_0 \in A; \quad \overline{z_0} \in A; \quad z_0i \in A.$$

b2) Sia $f :]-1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ la funzione definita da $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

- i) Verificate che f è biettiva e determinate la sua funzione inversa f^{-1} .
- ii) Rappresentate entrambe le funzioni nello stesso sistema di riferimento.
- iii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = 0$ e l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto di coordinata $x = 1$. Cosa osservate?

b3) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità/punti di non-derivabilità, punti critici e loro natura) la funzione

$$f(x) = x^3 e^{-|x-1|-x}$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

- ii) Verificate che $F(x) = \left(-\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right) e^{-2x+1}$ è una primitiva della funzione $f(x)$ per $x \geq 1$.
 - iii) Calcolate, usando la definizione, l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.
-

b4) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

i) il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5n^2 + n) \sin\left(\frac{1}{n^2 + 4n^\alpha}\right).$

ii) il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (5n^2 + n) \sin\left(\frac{1}{n^2 + 4n^\alpha}\right).$

b5) i) Determinate l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$(*) \quad y'' - 4y = 2e^x.$$

- ii) Individuate la soluzione di $(*)$ soddisfacente $y(0) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$.
-

b6) i) La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $x_0 = 1$ se

- ii) Enunciate e provate la formula del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica.
-

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CdL IN INFORMATICA - CdL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E DELLE COMUNICAZIONI

CdL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E ORGANIZZAZIONE D'IMPRESA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2018-2019 — TRENTO, 31 GENNAIO 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.

È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.

Non usate il colore rosso.

a1) Sia $A = \left\{ x_n = -\frac{1}{n^2 + 3} : n \in \mathbb{N}, n \geq 0 \right\}$. Determinate $\inf A$ e $\sup A$.

Risposta:

a2) Determinate l'argomento principale del numero complesso $z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$.

Risposta:

a3) Risolvete la disequazione $\log(-x + 3) < 0$.

Risposta:

a4) Determinate per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $6 \arctan x = k$ ha una soluzione in \mathbb{R} .

Risposta:

a5) Calcolate $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+2} + 2 \log x^3}{2^{-x} + \sqrt{x}}.$

Risposta:

a6) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$. Determinate l'espressione della funzione composta $(g \circ f)(x)$.

Risposta:

a7) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $f(x) = \log(1 + x - x^2)$.

Risposta:

a8) Determinate l'intervallo in cui $f(x) = 6x^2 - x^3$ risulta convessa.

Risposta:

a9) Determinate il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n3^n}.$

Risposta:

a10) Determinate $\int 4x \log x \, dx.$

Risposta:

b1) Sia A l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ soddisfacenti il sistema

$$\begin{cases} |z - 1| \leq |z - i| \\ 1 \leq |z| \leq 2. \end{cases}$$

- i) Individuate A e rappresentatelo nel piano di Gauss.
- ii) Verificate che $z_0 = \sqrt{3} + i \in A$.
- iii) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

$$-z_0 \in A; \quad \overline{z_0} \in A; \quad z_0 i \in A.$$

b2) Sia $f :]0, +\infty[\rightarrow]-1, +\infty[$ la funzione definita da $f(x) = \frac{1}{x} - 1$.

- i) Verificate che f è biiettiva e determinate la sua funzione inversa f^{-1} .
- ii) Rappresentate entrambe le funzioni nello stesso sistema di riferimento.
- iii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di coordinata $x = 1$ e l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto di coordinata $x = 0$. Cosa osservate?

b3) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità/punti di non-derivabilità, punti critici e loro natura) la funzione

$$f(x) = x^3 e^{-|x+1|+x}$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

- ii) Verificate che $F(x) = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} \right) e^{2x+1}$ è una primitiva della funzione $f(x)$ per $x \leq -1$.
 - iii) Calcolate, usando la definizione, l'integrale improprio $\int_{-\infty}^{-1} f(x) dx$.
-

b4) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$

- i) il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (6n^2 + n) \arctan \left(\frac{1}{2n^2 + 4n^\alpha} \right)$.
 - ii) il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (6n^2 + n) \arctan \left(\frac{1}{2n^2 + 4n^\alpha} \right)$.
-

b5) i) Determinate l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$(*) \quad y'' - 9y = 3e^x.$$

- ii) Individuate la soluzione di $(*)$ soddisfacente $y(0) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0$.
-

b6) i) La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $x_0 = 2$ se

- ii) Enunciate e provate la formula del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica.
-