COGNOME ______________ NOME ______________ MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	NON SCRIVERE QUI 1 2 3 4 5 6 A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E DELLE COMUNICAZIONI
CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E ORGANIZZAZIONE D'IMPRESA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2018-2019 — TRENTO, 13 GIUGNO 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Non usate il colore rosso.

---

a1) Siano $A = [-2, 0]$ e $B = [-1, 1]$. Rappresentate GRAFICAMENTE gli insiemi $A \cap B$ e $A \times B$.

Risposta:

---

a2) Scrivete in forma trigonometrica il numero complesso $z = 1 - \sqrt{3}i$.

Risposta:

---

a3) Determinate l'insieme $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x| - 1} > -1\right\}$. Dite se è un insieme limitato.

Risposta:

---

a4) Calcolate $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \log(1 + 2x)}{e^{x^2} - 1}$.

Risposta:

a5) Determinate i punti critici della funzione $f(x) = x^3 - x$ su $\mathbb{R}$.

Risposta:

---

a6) Sia $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$. Determinate eventuali asintoti orizzontali di f.

Risposta:

---

a7) Sia $f(x) = -x^2 + 2x$ su $[0,3]$. Determinate $c \in]0,3[$ per cui f soddisfa su $[0,3]$ la tesi del teorema di Lagrange.

Risposta:

---

a8) Determinate $\displaystyle\int x \sin x \, dx$.

Risposta:

---

a9) Determinate gli $\alpha \in \mathbb{R}$, per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha^2 - \alpha)^n$ risulti convergente.

Risposta:

---

a10) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' - y' = 0$.

Risposta:

---

b1) i) Determinate le due coppie $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ per le quali

$$f(x) = \begin{cases} b(x - \frac{1}{2}) + a\log(1-2x) & \text{se } x < 0 \\ ae^{bx} - \frac{3}{2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile in $x = 0$.

ii) Tra le due coppie trovate in i), individuate quella che rende la funzione f verificante $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\dfrac{3}{2}$. Rappresentate qualitativamente il grafico di tale f in un intorno (piccolo) di $x = 0$.

---

b2) Determinate gli eventuali $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2-x} - \cos(\alpha x) + \log(1 + x - \frac{3}{2}x^2)}{x \arctan x} = 1\,.$$

---

b3) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura) la funzione

$$f(x) = \arctan(|x| - \frac{1}{x})$$

e tracciatene un grafico qualitativo.

ii) Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

iii) Sia A il dominio di f. Determinate $\inf\limits_{x\in A} |f(x)|$ e $\sup\limits_{x\in A} |f(x)|$.

---

b4) i) Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Trovate il (valore) massimo M_n della funzione $f_n(x) = \dfrac{x}{2 + nx^2}$.

ii) Determinate per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (M_n)^\alpha$.

---

b5) Usando la definizione, calcolate il seguente integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1}\, dx\,.$$

(Facoltativo: discutetene l'integrabilità (convergenza) senza il calcolo esplicito).

---

b6) i) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *limitata inferiormente* se ....

ii) Enunciate e provate il teorema fondamentale del calcolo integrale.

COGNOME ______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA └┴┴┴┴┴┘	B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — DIP. DI INGEGNERIA E SCIENZA DELL'INFORMAZIONE

CDL IN INFORMATICA - CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E DELLE COMUNICAZIONI
CDL IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE E ORGANIZZAZIONE D'IMPRESA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA 1

A.A. 2018-2019 — TRENTO, 13 GIUGNO 2019

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
IL SUPERAMENTO DEI PRIMI 10 ESERCIZI È CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÈ LA SECONDA PARTE DEL COMPITO VENGA VALUTATA.
È OBBLIGATORIO RIPORTARE LE RISPOSTE DEI PRIMI 10 ESERCIZI SUL FOGLIO PRESTAMPATO.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo.
Non usate il colore rosso.

a1) Siano $A = [-1, 2]$ e $B = [-2, 0]$. Rappresentate GRAFICAMENTE gli insiemi $A \cap B$ e $A \times B$.

Risposta:

a2) Scrivete in forma trigonometrica il numero complesso $z = -1 + \sqrt{3}i$.

Risposta:

a3) Determinate l'insieme $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x| - 2} > -1 \right\}$. Dite se è un insieme limitato.

Risposta:

a4) Calcolate $\lim_{x \to 0} \dfrac{x(e^{2x} - 1)}{\sin x^2}$.

Risposta:

a5) Determinate i punti critici della funzione $f(x) = x - x^3$ su $\mathbb{R}$.

Risposta:

---

a6) Sia $f(x) = \dfrac{-3x+1}{x+1}$. Determinate eventuali asintoti orizzontali di f.

Risposta:

---

a7) Sia $f(x) = x^2 - 2x$ su $[0,3]$. Determinate $c \in]0,3[$ per cui f soddisfa su $[0,3]$ la tesi del teorema di Lagrange.

Risposta:

---

a8) Determinate $\displaystyle\int x \cos x \, dx$.

Risposta:

---

a9) Determinate gli $\alpha \in \mathbb{R}$, per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha^2 + \alpha)^n$ risulti convergente.

Risposta:

---

a10) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + y' = 0$.

Risposta:

---

b1) i) Determinate le due coppie $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ per le quali

$$f(x) = \begin{cases} b(x - \frac{1}{2}) + a\log(1-x) & \text{se } x < 0 \\ ae^{bx} - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile in $x = 0$.
ii) Tra le due coppie trovate in i), individuate quella che rende la funzione f verificante $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$. Rappresentate qualitativamente il grafico di tale f in un intorno (piccolo) di $x = 0$.

---

b2) Determinate gli eventuali $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2-x} - \cos x + \log(1 + x - \alpha^2 x^2)}{x \sin x} = 1 .$$

---

b3) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura) la funzione

$$f(x) = \arctan(\frac{1}{x} - |x|)$$

e tracciatene un grafico qualitativo.
ii) Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
iii) Sia A il dominio di f. Determinate $\inf_{x\in A} |f(x)|$ e $\sup_{x\in A} |f(x)|$.

---

b4) i) Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Trovate il (valore) massimo M_n della funzione $f_n(x) = \dfrac{x}{3 + nx^2}$.

ii) Determinate per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (M_n)^\alpha$.

---

b5) Usando la definizione, calcolate il seguente integrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{e^x - 1}\, dx .$$

(Facoltativo: discutetene l'integrabilità (convergenza) senza il calcolo esplicito).

---

b6) i) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *limitata superiormente* se ....

ii) Enunciate e provate il teorema fondamentale del calcolo integrale.
