Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica
Corso di Calcolo delle Variazioni - a.a. 2017/18 (periodo 19/02/18-01/06/18)
docente: Prof. Anneliese Defranceschi
e-mail: anneliese.defranceschi@unitn.it
homepage: http://latemar.science.unitn.it/defranceschi

Lezioni: lunedì 9.30-11.30, mercoledì 9.30-11.30

19/02/18 (2 ore):

Introduzione al corso: orario, indirizzo e-mail, presentazione del programma (in linea di massima). Ottimizzazione in $\mathbb{R}$ (si ricorda: punti estremi, non-esistenza di minimi/massimi; punti critici; condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di punti estremi (locali e non) nel caso di funzioni regolari; teorema di Weierstrass).
Integrali variazionali (integrando variazionale, funzione di Lagrange o lagrangiana) e problemi di minimo relativi a funzionali integrali. Esempio di modellizzazione del problema della ricerca della curva di minima lunghezza tra due punti fissati nel piano mediante un funzionale integrale (inoltre cenno alla brachistocrona).
Nota sulla non-esistenza di minimi: Esempio di Weierstrass: $F(u) = \int_{-1}^{1} x^2(u'(x))^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$ (esempio di Weierstrass). Non-esistenza del minimo (e del massimo): $F(u) = \int_0^1 \frac{1}{1+(u'(x))^2}\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$.

21/02/18 (2 ore):

Metodi indiretti (classici). Metodi diretti del CdV.
Esempi di modellizzazione mediante funzionali integrali (curva di minima lunghezza, brachistocrona, superficie di rivoluzione di area minima, cenno al problema di Didone; disuguaglianza ispoerimetrica).
Ottimizzazione in $\mathbb{R}^n$ :punti estremi, punti critici, variazione prima e seconda.

26/02/18 (2 ore):

Cond. necessari e sufficienti affinchè un punto critico sia punto di minimo.
Variazione prima e variazione seconda per $F : X \to \mathbb{R}$ , $X \subseteq V$ con $V$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e punti di minimo. Calcolo della variazione prima per funzionali integrali.
Lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni.
**Metodo indiretto (metodi classici)**. Brevi cenni storici. Equazione di Eulero-Lagrange in forma debole ($EED$). Estremale debole di $F$ . Equazione di Eulero-Lagrange ($EE$). Estremale di $F$.

28/02/18 (2 ore):

Dim. di (EED) e (EE).
Non-regolarità $\mathcal{C}^2$ di estremali deb. e minimizzanti: $F(u) = \int_{-1}^{1}(u(x))^2[2x - u'(x)]^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$.
Non-esistenza di un minimizzante $\mathcal{C}^1$: $F(u) = \int_0^1[(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$ (paradosso di Eulero). Il minimo esiste nella classe delle funzioni $\mathcal{C}^1$-a tratti.
Equazione di Eulero-Lagrange per $F(u) = \int_0^1[(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$ . Esistenza di un estremale di $F$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$ che non è minimo.
Funzioni convesse. Disuguaglianza di Jensen. La convessità della funzione lagrangiana come condizione sufficiente affinchè un estremale di $F$ sia un punto di minimo.

07/03/18 (2 ore):

Stretta convessità ed unicità degli eventuali minimi. La versione indebolita di stretta convessità.
L'equazione di Eulero-Lagrange $(EE)'$. Se $f$ non dipende esplicitamente da $x$ (caso autonomo), allora $\Phi(u,\xi) := f(u,\xi) - \xi f_\xi(u,\xi)$ è un integrale primo del funzionale $F$ .
Equivalenza tra (EE) e $\Phi(u_0, u_0') =$ costante per soluzioni $u_0$ non costanti.
*L'equazione di Eulero-Lagrange* ($EE$) *(o (EED)) e gli estremali (e loro natura) di* $F$ *:*

Caso 1): $f(x,u,\xi) = f(\xi)$.
Vari commenti sul caso generale.

1a): Il caso strettamente convesso; il caso convesso. La retta come soluzione del problema di minimo. Unicità/non unicità del minimo. Curva di minima lunghezza (caso non-parametrico).

12/03/18 (2 ore):

Qualche osservazione sull'equazione di (EE), sempre nel caso $f(x,u,\xi) = f(\xi)$. Disuguaglianza di Jensen e la minimalità della retta. Problema di minimo di $F(u) = \int_0^2 (u'(x))^2\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,2]) : u(0) = 5, u(2) = 10\}$.

1b): Il caso non-convessa: discussione sull'esistenza (o non) di un minimo.

Il funzionale $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = \lambda\}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Lemma trivial (condizione sufficiente per la minimalità mediante funzionale ausiliario). Una sua applicazione diretta al funzionale del doppio pozzo (via convessificazione).

Caso 2): $f(x,u,\xi) = f(x,\xi)$.

Commento sul caso generale. L'esempio di Weierstrass. Ricerca del punto di minimo di $F(u) = \int_1^2 [u'(x)(1 + x^2u'(x)]\,dx$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([1,2]) : u(1) = 3, u(2) = 5\}$.

Caso 3): $f(x,u,\xi) = f(u,\xi)$.

3.a) $f$ convessa ($F(u) = \int_{-1}^1 [\frac{k}{2}(u'(x))^2 + gu(x)]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = 0, u(1) = 0\}$; corda elastica).

15/03/18 (2 ore):

Interpretazione fisica del funzionale $F(u) = \int_{-1}^1 [\frac{k}{2}(u'(x))^2 + gu(x)]\,dx$; corda elastica.

L'integrale primo di $F(x) = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{m}{2}|x'(t)|^2 - V(x(t))]\,dt$ e la conservazione dell'energia totale (interpretazione fisica dell'equivalenza tra (EE)' e (EE)).

Disuguaglianza di Poincarè. Dimostrazione della disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger.

3.b) $f$ non convessa. Studio del problema di minimo di $F_\lambda(u) = \int_0^\pi [(u'(x))^2 - \lambda^2(u(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,\pi]) : u(0) = 0, u(\pi) = 0\}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

19/03/18 (2 ore):

Caso 4): $f = f(x,u,\xi)$

($F(u) = \int_0^1 [\frac{1}{2}(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 0\}$; $g$ continua assegnata; esistenza di un unico estremale in $X$ che risulta essere minimo; caso $g(x) = \sin x$).

($F(u) = \int_0^{2\pi} [(u'(x))^2 + (u(x) - g(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,2\pi]) : u(0) = 0, u(2\pi) = \beta\}$; $g$ continua assegnata; esistenza di un unico estremale in $X$ che risulta essere minimo; caso $g(x) = \sin 4x$ con $\beta = 0$ oppure $\beta = 1$).

Non-esistenza del minimo per $F(u) = \int_0^1 [u^2 + xu']\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 1, u(1) = 0\}$.

Studio del problema della brachistocrona: non-convessità della funzione lagrangiana.

L'integrale primo legato al funzionale della brachistocrona $T(u)$. La soluzione (espressa in forma parametrica) è un arco di cicloide.

21/03/18 (2 ore):

La soluzione (espressa in forma parametrica) è un arco di cicloide. Essa risulta essere l'unico minimo per $T(u)$ in $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = 0, u(b) = \beta, u > 0 \text{ su } ]0,b[\}$. Tempo minimo di percorrenza.

Confronto con il tempo di percorrenza lungo una retta. Ancora qualche osservazione sulla brachistocrona: confronto con il tempo di percorrenza lungo una semicirconferenza. Tautocronia della cicloide (solo accennato).

26/03/18 (2 ore):

Metodo risolutivo per equazioni differenziali del tipo $F(y,y') = 0$ (giustificazione delle scelte fatte nella risoluzione dell'integrale primo legato al funzionale della brachistocrona).

Studio del problema delle superfici di rivoluzione di area minima. Funzioni iperboliche; l'integrale primo legato al funzionale $S(u)$; catenaria, catenoide. Esistenza o non di estremali soddisfacenti le condizioni al contorno. Osservazioni varie sulla loro natura.
Discussione del problema di minimo per $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + (u(x))^2]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\}$ (visto fino ad ora; equazione di Eulero-Lagrange con dati al bordo di Dirichlet); per $F(u)$ su $\widetilde{X} = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]) : u(a) = \alpha\}$ (equazione di Eulero-Lagrange con dato al bordo di Dirichlet e di Neumann).
Discussione del problema di minimo per $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + (u(x))^2]\, dx$ su $\widehat{X} = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b])\}$ (equazione di Eulero-Lagrange con dati al bordo di Neumann); per $F(u)$ su $X^* = \{u \in \mathcal{C}^1([a, b]) : u(a) = u(b)\}$ (equazione di Eulero-Lagrange con condizioni al bordo periodiche).

28/03/18 (2 ore): Qualche esercizio/commento per $F(u)$ visto nella lezione precedente.
Problemi variazionali con vincolo isoperimetrico: Teorema dei moltiplicatori di Lagrange (con dim.). Il caso convesso.
Applicazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange a $F(u) = \int_0^1 (u'(x))^2\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ con il vincolo isoperimetrico $G(u) = \int_0^1 u(x)\, dx = 1$.

04/04/18 (2 ore):
Il problema della catenaria (il problema del filo pesante).
Il problema di Didone usando i moltiplicatori di Lagrange. Prima parte.

09/04/18 (2 ore):
Il problema di Didone usando i moltiplicatori di Lagrange: controllo del vincolo.
Il problema di Didone usando il teorema di Green nel piano e la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger.
Il caso generale. La disuguaglianza isoperimetrica nel piano (usando la disuguaglianza di Poincarè-Wirtinger generale e il teorema di Green - le dim. tracciate a grandi linee).

11/04/18 (2 ore):
Il lemma di du Bois-Reymond. Un corollario del lemma di du Bois-Reymond. L'equazione di Eulero-Lagrange per $f$ e $u$ di classe $\mathcal{C}^1$. L'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale.
Estremali spezzati: l'equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale e le condizioni di Erdmann-Weierstrass (senza dim.).
Esempio 1.: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2\, dx$ su $Y = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ e su $Y^\beta = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([0, 1]) : u(0) = 0, u(1) = \beta\}$.
Esempio 2.: $F(u) = \int_{-1}^1 (u(x))^2(1 - u'(x))^2\, dx$ su $Y = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([-1, 1]) : u(-1) = 0, u(1) = 1\}$ e su $Y^{\alpha,\beta} = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([-1, 1]) : u(-1) = \alpha, u(1) = \beta\}$ (da completare).

16/04/18 (2 ore):
Completato esempio 2.
Minimi locali (relativi) deboli e forti (stretti). Ovviamente ogni punto di minimo locale (relativo) forte è un punto di minimo locale (relativo) debole. Non vale il viceversa: la funzione identicamente nulla su $[0, 1]$ è un punto di minimo relativo debole, ma non forte, per $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - (u'(x))^4]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.
Analogamente per il funzionale di Scheeffer: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0, 1]) : u(0) = u(1) = 0\}$.

18/04/18 (2 ore):
Condizioni necessarie per punti di minimo relativo debole per $F$ su $X$.
La variazione seconda e condizioni sufficienti (coercitività) affinchè un estremale debole di $F$ sia un punto di minimo relativo debole per $F$ su $X$. La condizione di positività della variazione seconda non è sufficiente affinchè un estremale debole di $F$ sia un punto di minimo relativo debole: esempio di Scheeffer ($F(u) = \int_{-1}^1 [x^2(u'(x))^2 + x(u'(x))^3]\, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1, 1]) : u(-1) = u(1) = 0\}$). Dim. che $u_0 \equiv 0$ non è un punto di minimo locale debole per $F$ su $X$.

Dimostrazione della sufficienza della coercitività della variazione seconda affinchè un estremale debole di $F$ sia un punto di minimo relativo debole.
La coercività della variazione seconda non è sufficiente affinchè un estremale debole di $F$ sia un punto di minimo relativo forte (esempio di Scheeffer: $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$).
Condizione necessaria di Legendre per minimi relativi deboli.

19/04/18 (2 ore):
Condizione necessaria di Legendre per minimi relativi deboli (conclusione della dim.). Applicazione agli estremali del funzionale $F(u) = \int_0^1 [3(u'(x))^4 - 20(u'(x))^3 + 36(u'(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = 1\}$.
Funzione di eccesso di Weierstrass. Condizione necessaria di Weierstrass per minimi relativi forti (senza dim.). Applicazione a $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 + (u'(x))^3]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$. Qualche commento sull'interpretazione grafica della condizione necessaria di Weierstrass. Dalla condizione necessaria di Weierstrass alla condizione necessaria di Legendre.
Lagrangiana accessoria e integrale accessorio.
Introduzione alla teoria di Jacobi per minimi relativi deboli. Equazione (accessoria) di Jacobi. Campi di Jacobi. Null-lagrangian.

23/04/18 (2 ore):
Lemma di Legendre. Lemma di Jacobi. Teorema: Condizioni sufficienti per minimi relativi deboli e campi di Jacobi (dim).
Funzione di Jacobi. Punti coniugati. Condizioni sufficienti per minimi relativi deboli e punti coniugati (senza dim.).
Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^b [(u'(x))^2 - (u(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = u(b) = 0\}$, al variare di $b > 0$.

26/04/18 (2 ore):
Applicazione della teoria di Jacobi allo studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^b [(u'(x))^2 - (u(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,b]) : u(0) = u(b) = 0\}$, al variare di $b > 0$.
Introduzione alla teoria dei campi di Weierstrass per minimi relativi forti. Campo di estremali (rispetto alla lagrangiana $f$) e funzione pendenza.
Campo di estremali e funzione pendenza: casi $f(x,u,\xi) = f(\xi)$ e $f(x,u,\xi) = \xi^2 - u^2$.
Equazione di Eulero (modificata) per il campo. Equazioni di Caratheodory.

02/05/18 (2 ore):
Equazioni di Caratheodory. Integrale invariante di Hilbert (rispetto ad $f$).
Condizioni sufficienti affinchè un estremale immerso in un campo di estremali sia un punto di minimo assoluto (mediante la funzione eccesso di Weierstrass). Campo di Weierstrass. Condizioni sufficienti affinchè un estremale immerso in un campo di estremali sia un punto di minimo relativo debole (risp. forte) (mediante la condizione di Legendre stretta (risp. forte)) (traccia di dim.).
Condizioni sufficienti affinchè un estremale sia un punto di minimo relativo forte mediante i punti coniugati e la teoria dei campi di estremali (senza dim.).
Applicazione a $F(u) = \int_0^1 u(x)(u'(x))^2\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 1\}$. Studio della natura dell'estremale $u_0(x) \equiv 1$. Dimostrazione che $F(u) = \int_0^1 u(x)(u'(x))^2\,dx$ non ammette minimo assoluto su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 1\}$.
Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - (u(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ (impostato).

03/05/18 (2 ore):
Studio della natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - (u(x))^2]\,dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}$ (completato).

Studio della natura dell'estremale $u_0(x) = kx$ di $F(u) = \int_0^1 [(u'(x))^2 - 1]^2 \, dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 0, u(1) = k\}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
**Metodo diretto**. Introduzione. Teorema di Weierstrass sui compatti di $\mathbb{R}^n$. Successione minimizzante. Prima variante del teorema di Weierstrass (ruolo della compattezza dei sottolivelli della funzione).

07/05/18 (2 ore):

Seconda variante del teorema di Weierstrass (ruolo della crescita all'infinito della funzione).
Funzione (seq.) semicontinua inferiormente. Esempi. Osservazioni varie. Caratterizzazioni della (seq.) semicontinuità inferiore.
Funzione (seq.) coercitiva. Esempi.
Teorema di Tonelli (generalizzazione del teorema di Weierstrass - metodo diretto): esistenza del minimo. Unicità del punto di minimo se garantita la stretta convessità.
Lo spazio $L^2(a, b)$: convergenza forte e convergenza debole. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. La convergenza forte implica la convergenza debole, ma non vale il viceversa (teorema di Riemann-Lebegsue; la sua applicazione garantisce che $u_h(x) = \sin(2\pi hx)$ converge debole in $L^2(0, 1)$ alla funzione $u(x) = 0$, ma non forte). Alcuni risultati astratti di continuità/semicontinuità della norma in $L^2(a, b)$ rispetto alla convergenza forte/convergenza debole, e la compattezza della palla chiusa in $L^2(a, b)$ rispetto alla convergenza debole (senza dim.).
1) Tentativo di applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto allo studio del problema di minimo per $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)] \, dx$ su $X = L^2(0, 1)$; innanzitutto la dim. (diretta) dell'esistenza del minimo per $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)] \, dx$ su $X = L^2(0, 1)$.

09/05/18 (2 ore):

1) Tentativo di applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto allo studio del problema di minimo per $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)] \, dx$ su $X = L^2(0, 1)$ *rispetto alla convergenza forte e il suo fallimento; rispetto alla convergenza debole.*
2) Tentativo di applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto ad un funzionale integrale dipendente dalla funzione $u$ e dalla derivata $u'$ : $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + g(x)u(x)] \, dx$ su $X = C^1([a, b])$ con dati nulli al bordo. Teorema di Ascoli-Arzelà (compattezza in $\mathcal{C}^0([a, b])$). La necessità di introdurre un nuovo spazio di funzioni e una convergenza 'naturale' data dal problema.
Funzioni assolutamente continue $AC([a, b])$: definizioni (di Tonelli, e di Vitali) a confronto e alcune proprietà, confronto con le funzioni lipschitziane, con le funzioni uniformemente continue, $\mathcal{C}^1([a, b])$. Esempio di funzione in $AC([0, 1])$, ma non in $\mathcal{C}^1([a, b])$. Lo spazio delle funzioni $H_0^1(a, b)$. Il problema di minimo per $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + g(x)u(x)] \, dx$ su $X = H_0^1(a, b)$.
Un risultato di esistenza di un minimo per $F(u) = \int_a^b [f(u'(x)) + g(x)u(x)] \, dx$ su $X = H_0^1(a, b)$ (accennato).