Università degli Studi di Trento - Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica
Corso di Calcolo delle Variazioni - a.a. 2017/18
docente: Prof. Anneliese Defranceschi
e-mail: anneliese.defranceschi@unitn.it
homepage: http://latemar.science.unitn.it/defranceschi
Nota: Sono a disposizione degli studenti note scritte dal docente. L'esame consiste in una prova orale sugli argomenti svolti a lezione.

Introduzione al corso. Ottimizzazione in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{R}^n$) (teorema di Weierstrass, punti critici, convessità, variazione prima e seconda).

Brevi cenni storici del CdV. Problemi variazionali. Integrali variazionali (integrando variazionale, funzione di Lagrange o lagrangiana). Esempi di modellizzazione mediante funzionali integrali (curva di minima lunghezza, brachistocrona, superficie di rivoluzione di area minima). Commenti sull'esistenza e sulla regolarità di minimi.

Metodi indiretti (classici)

Problemi variazionali (dimensione uno e caso scalare). Variazione prima e condizioni necessarie (equazioni di Eulero-Lagrange..., estremali..., funzioni minimizzanti...). Condizioni sufficienti (convessità). Applicazioni varie; discussione dei modelli presentati sopra (cicloide, catenaria, catenoide).

Problemi variazionali con vincoli isoperimetrici (dimensione uno e caso scalare). Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Applicazioni varie; il problema di Didone. La disuguaglianza isoperimetrica (dim. di Hurwitz).

Equazione di Eulero-Lagrange in forma integrale. Estremali spezzati (eq. di Eulero-Lagrange in forma integrale e le condizioni di Erdmann). Applicazioni.

Problemi variazionali. Minimi relativi deboli e forti (stretti). Esempi e controesempi. Variazione seconda e condizioni sufficienti. Condizioni necessarie e sufficienti per minimi relativi. Condizione di Legendre (integrale accessorio e lagrangiana accessoria), di Weierstrass (funzione di eccesso di Weierstrass). Campi di Jacobi. Teoria di Jacobi. Campi di estremali. Eq. di Caratheodory. Integrale invariante di Hilbert. Applicazioni.

Metodi diretti

Funzione semicontinua inferiormente e sottolivelli compatti. Funzione coerciva. Teorema di Tonelli (generalizzazione del teorema di Weierstrass). Esistenza del minimo. Applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto al funzionale integrale $F(u) = \int_0^1 [(u(x))^2 - 2g(x)u(x)]\,dx$ su $X = L^2(0,1)$. Applicazione del quadro teorico generale del metodo diretto al funzionale integrale $F(u) = \int_a^b [(u'(x))^2 + g(x)u(x)]\,dx$ su $X = H_0^1(a,b)$. Funzioni assolutamente continue $AC([a,b])$: definizioni a confronto e alcune proprietà. Un risultato di esistenza di un minimo per $F(u) = \int_a^b [f(u'(x)) + g(x)u(x)]\,dx$ su $X = H_0^1(a,b)$.

Un risultato di esistenza di un minimo per $F(u) = \int_a^b [f(u'(x)) + g(x)u(x)]\,dx$ su $X = H_0^1(a,b)$. Derivata debole. Spazi di Sobolev $W^{1,p}(a,b)$. Confronto tra le classi di funzioni $AC([a,b])$ e $W^{1,1}(a,b)$. Teorema di compattezza debole in $W^{1,p}(a,b)$, per $1 < p < +\infty$. Teorema di semicontinuità di Tonelli. Teorema di esistenza di Tonelli. Applicazioni.

Bibliografia

Note del corso

1. U. Brechtken-Manderscheid: Einfuehrung in die Variationsrechnung. Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt (1983).

2. H. Brezis: Analisi Funzionale. Liguori, Napoli (1986).

3. G. Buttazzo, M. Giaquinta, S. Hildebrandt: One-dimensional variational problems. Clarendon Press, Oxford (1998).

4. B. Dacorogna: Introduction to the Calculus of Variations. Imperial College Press (2004).
5. G.B. Folland: Real Analysis. Modern Techniques and their Applications. J. Wiley and Sons (1994).
6. I. Fonseca, G. Leoni: Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p Spaces. Springer NY (2007).
7. M. Giaquinta, S. Hildebrandt: Calculus of Variations I. Springer Verlag (1994).
8. J.L. Troutman: Variational Calculus with Elementary Convexity. Springer, New York (1983).