Università di Trento – Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica e CdL in Ingegneria Informatica delle Comunicazioni ed Elettronica

Diario del Corso di Analisi Matematica 1 - a.a. 2019/20
Prof. Anneliese Defranceschi

16/09/19 (2 ore): Introduzione al corso: orario, esercitazioni, ricevimento studenti, sito web, tempi e modalità delle prove di valutazione (compitini in itinere, prova finale). Proposizioni. Esempi. Connettivi logici (non, **e**, **o**, implicazione, doppia implicazione) e la loro tavola di verità. Proposizioni equivalenti. Proprietà di '**e**' ed '**o**' (commutativa, associativa, distributiva). La negazione ed '**e**'; la negazione ed '**o**'.
Nota 1Lez Pag. 1-6

17/09/19 (2 ore): La negazione e l'implicazione.
Tautologia. Modus Ponens. Principio di contrapposizione (Modus Tollens). Loro applicazione nelle dimostrazioni.
Predicati. Esempi. Predicati con più variabili. Esempi. Quantificatori (per ogni; esiste). Esempi. Quantificatori e predicati con più variabili.
Negazione di una proposizione contenente quantificatori. Esercizi.
Terminologia sugli insiemi (enumerazione; mediante predicati). Simbolo di appartiene ($\in$) e di non appartiene ($\notin$). Esempi. Insiemi numerici: $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$.
Proposizioni con quantificatori.
Nota 2Lez Pag. 7-17

19/09/19 (2 ore): Esercizi: proposizioni con quantificatori e loro negazione.
Insieme vuoto. Sottoinsieme di un insieme. Uguaglianza di insiemi. Gli insiemi $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}^-$. Gli intervalli limitati (chiusi, aperti,...), gli intervalli illimitati. La loro rappresentazione grafica. Esempi. Unione, intersezione di insiemi. Esercizio di insiemistica (scrittura corretta).
Differenza di insiemi, complementare (diagrammi di Venn). Esercizi di insiemistica (scrittura corretta; unione, intersezione, differenza di insiemi).
Insieme delle parti di un insieme. Esempi. Prodotto cartesiano di due insiemi. Esempi. Il prodotto cartesiano $\mathbf{R}\mathrm{x}\mathbf{R}$ e sua rappresentazione grafica. Rappresentazione grafica di alcuni sottoinsiemi di $\mathbf{R}\mathrm{x}\mathbf{R}$.
Algebra elementare dei numeri razionali (l'addizione e la moltiplicazione).
Nota 3Lez Pag. 18-27

20/09/19 (2 ore): Alcune conseguenze. La legge di annullamento del prodotto (commento sulla sua applicazione). La relazione d'ordine $\leq$ (ordinamento totale) e la compatibilità dell'ordine con le operazioni di somma e prodotto (commento sulle loro applicazioni). Queste proprietà valgono anche in $\mathbf{R}$. Conseguenze: qualche disequazione, equazione.
Il valore assoluto: definizione e proprietà. Disuguaglianza triangolare. Disequazioni con il valore assoluto.
Nota 4Lez Pag. 28-36

23/09/18 (2 ore): *Proprietà di densità. Proprietà di Archimede.* Corollari della proprietà archimedea.
Teorema: L'equazione $x^2 = 2$ non ha una soluzione in $\mathbf{Q}$ (ossia la radice di 2 non è un numero razionale).
I numeri reali $\mathbf{R}$ (l'addizione, la moltiplicazione, l'ordinamento come in $\mathbf{Q}$): assioma di continuità.
Rappresentazione decimale dei numeri razionali (allineamenti decimali). Definizione/rappresentazione dei numeri reali usando gli allineamenti decimali.

Definizione di numero irrazionale. (Approssimazione di radice di due con un allineamento decimale).
In **R** valgono ancora la proprietà archimedea e la proprietà di densità (sia dei razionali che degli irrazionali).
Maggiorante e minorante di un insieme numerico. Insiemi numerici limitati inferiormente, limitati superiormente, limitati. Esempi.
Massimo e minimo di un insieme numerico. Unicità del massimo (minimo), se esiste. Esempi.
Estremo superiore e estremo inferiore di un insieme numerico. Confronto con il massimo e il minimo. Esempi.
Caratterizzazione dell'estremo superiore/estremo inferiore. Esempi.
Nota 5Lez Pag. 37-52

24/09/19 (2 ore): **Esercitazione:** Qualche elemento di logica e di insiemistica. Sottoinsiemi di **RxR**. Disequazioni con potenze, radici, valore assoluto. Insiemi limitati inferiormente/superiormente. Estremo superiore/estremo inferiore di sottoinsiemi di **R**. Massimo/minimo di un insieme.
Nota 1Es Pag. 1-9

26/09/19 (2 ore): Teorema (*Completezza di* **R**): Esistenza dell'estremo superiore (estremo inferiore) in **R** per sottoinsiemi superiormente limitati (inferiormente limitati).
Esercizi: su limitatezza di insiemi discreti e non; inf/sup (con caratterizzazione).
Disequazioni con valore assoluto (insiemi limitati/inf/sup).
Rappresentazione di sottoinsiemi di **RxR** nel piano cartesiano.
a) Potenze ad esponente intero positivo o nullo (proprietà e rappresentazione grafica delle coppie (x,x^m) nel piano cartesiano).
Varianti su $y=x^2$, $y=x^3$.
Nota 6Lez Pag. 53-61

27/09/19 (2 ore). b) Potenze ad esponente intero negativo (rappresentazione grafica delle coppie (x,x^m) nel piano cartesiano). Varianti.
Teorema di esistenza della radice n-esima di un numero reale non negativo. (Cenno della dimostrazione). La radice n-esima di un numero negativo, se n è dispari. Segue da questo teorema la definizione di:
c) Potenze ad esponente frazionario (proprietà e rappresentazione grafica delle coppie $(x,x^{1/n})$ nel piano cartesiano). Varianti.
d) Potenze ad esponente razionale (per poter dare una buona definizione ci si deve restringere ad una base strettamente positiva!).
e) Potenze ad esponente reale e base $a > 0$ fissata (proprietà e rappresentazione grafica delle coppie (x, a^x) nel piano cartesiano). Numero di Nepero **e**.
Nota 7Lez Pag. 62-72

30/09/19 (3 ore): e) Potenze ad esponente reale e base $a > 0$ fissata (proprietà e rappresentazione grafica delle coppie (x, a^x) nel piano cartesiano). Esercizi (risoluzione di equazioni e disequazioni). *Teorema di esistenza del logaritmo in base a di un numero positivo* (rappresentazione grafica delle coppie $(x,\log_a x)$ nel piano cartesiano). Notazione: $\log_e x$ sarà sempre denotato con $\log x$. Calcolo di qualche logaritmo. Proprietà dei logaritmi. Esercizi.
Numeri complessi: forma algebrica. Parte reale e parte immaginaria. L'addizione e la moltiplicazione in **C**. Esempi.
La sottrazione e la divisione in **C**. Esempi. Rappresentazione nel piano complesso (piano di Gauss). Interpretazione geometrica della somma di due numeri complessi. Coniugato, modulo e la loro interpretazione geometrica.
Nota 8Lez Pag. 72-88

01/10/19 (2 ore): **Esercitazioni:** Numeri complessi (forma algebrica; coniugato, modulo, rappresentazione grafica in **C**), Disequazioni con valore assoluto, esponenziali e logaritmi. Insiemi limitati inferiormente/superiormente. Massimo/minimo di un insieme. Estremo superiore/estremo inferiore di sottoinsiemi di **R**.
Nota 2Es Pag. 10-22

03/10/19 (2 ore): Forma trigonometrica di un numero complesso. Dalla forma algebrica alla forma trigonometrica e viceversa. Esempi.
Interpretazione geometrica della moltiplicazione (divisione) di due numeri complessi.
Potenza n-esima di un numero complesso. Esempi. *Radici n-esime di un numero complesso.* Esempi.
Nota 9Lez Pag. 89-99

04/10/19 (2 ore): Dimostrazione dell'esistenza delle n radici n-esime di un numero complesso.
Forma esponenziale di un numero complesso. Esercizi.
Risoluzione di equazioni di secondo grado in $\mathbf{C}$. Esercizi vari.
Sistemi di numeri complessi.
Principio di induzione.
Nota 10Lez Pag. 100-112

07/10/19 (3 ore): Principio di induzione. Vari commenti. Esempi: $10^n \geq n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$; somma dei primi n numeri naturali; la somma geometrica; disuguaglianza di Bernoulli; $n! \geq 4^{n-3}$ per ogni $n \geq 0$.
Funzioni: esempi. Dominio, codominio, legge. Scrittura. Rappresentazione grafica di funzione e non. Dominio naturale (insieme di definizione). Uguaglianza di due funzioni. Funzione reale (a valori reali) di variabile reale.
Dominio naturale (insieme di definizione).
Funzioni costanti, l'identità, la restrizione. Immagine di una funzione. Rappresentazione grafica. Grafico di una funzione. Esempio.
Funzioni reali di variabile reale: lettura dell'immagine e del grafico.
Nota 11Lez e Nota 11Lez_ALLEGATO_FunzioniElementari_1 Pag. 113-132

08/10/19 (2 ore): **Esercitazione**: Numeri complessi (forma algebrica/ trigonometrica/ esponenziale; potenze; radici; equazioni; insiemi nel piano di Gauss). Sistemi.
Principio di induzione.
Dal grafico di f al grafico di $f(x)\pm a$, di $f(x\pm a)$, di $af(x)$, di $f(ax)$ (traslazioni lungo l'asse y, lungo l'asse x, riscalamenti della variabile dipendente, della variabile indipendente). Cenno.
Nota 3Es Pag. 23-30

10/10/19 (2 ore): Somma/differenza/prodotto/rapporto di funzioni reali. Funzioni definite a tratti.
Funzioni monotone. Funzione crescente (strettamente crescente)/ decrescente (strettamente decrescente). Intervalli di monotonia. Esempi. Monotonia di $f(x)=ax+b$, per $a\neq 0$. Monotonia delle funzioni potenze.
Funzione parte intera,
Funzioni simmetriche. Insieme simmetrico (rispetto all'origine). Funzione pari/dispari. Rappresentazione grafica. Esempi.
Funzioni periodiche. Funzione periodica di periodo T (oppure T-periodica). Intervallo di periodicità. Funzione mantissa. Funzioni trigonometriche: coseno, seno, tangente.
Funzioni limitate. Rappresentazione grafica.
Nota 12Lez Pag. 133-141

11/10/19 (2 ore): *Estremi di una funzione.* Funzione limitata superiormente/inferiormente/limitata. Rappresentazione grafica. Esempi.
Estremo inferiore/estremo superiore di una funzione. Esempi.
Caratterizzazione estremo inferiore/estremo superiore di una funzione.
Massimo (globale/assoluto) di una funzione. Punto di massimo. Minimo (globale/assoluto) di una funzione. Punto di minimo. Unicità degli estremi (massimo/minimo), se esistono. Esempi.
Successione a valori reali. Termine di una successione. Monotonia. Monotonia di $a_n=1-1/n$.

Funzione composta. Esempi. Dominio naturale di funzioni ottenute mediante composizione di funzioni elementari. Monotonia della funzione composta a partire dalla monotonia delle funzioni di partenza.
Grafici delle funzioni elementari (monotonia, simmetria, periodicità).
Nota 13Lez Pag142-153 e
Nota 13Lez_ALLEGATO_FunzioniElementari_2 Pag. 154-158

14/10/19 (2 ore): *Funzione iniettiva/suriettiva.* Esempi. *Funzione biiettiva.*
La funzione inversa. Grafico della funzione inversa. Esempi.
Funzioni trigonometriche inverse (arcoseno, arcocoseno, arcotangente). Disequazioni con le funzioni trigonometriche inverse.
Nota 14Lez Pag.159-168
Nota 14Lez_ALLEGATO_FunzioniElementari_3 Pag. 169

15/10/19 (2 ore): **Esercitazione**: Dal grafico di f al grafico di f(x)±a, di f(x±a), di af(x), di f(ax) (traslazioni lungo l'asse y, lungo l'asse x, riscalamenti della variabile dipendente, riscalamenti della variabile indipendente); dal grafico di f al grafico di |f(x)| e di f(|x|).
Funzioni con discussione: monotonia – simmetria – limitatezza – sup/inf – max/min. Funzione iniettiva/suriettiva. Funzioni composte. Funzioni trigonometriche inverse. Determinare, al variare di $k\in\mathbf{R}$, il numero delle soluzioni di un'equazione del tipo f(x)=k.
Nota 4Es Pag. 31-38

17/10/19 (2 ore): [Stretta monotonia e invertibilità di una funzione: commento fatto a voce]. Ancora qualche commento sulle disequazioni con funzioni trigonometriche inverse. Equazioni e disequazioni: risoluzione con il metodo grafico.
Proprietà locali di una funzione. La distanza euclidea in **R**; intorno (sferico) di un punto di R. Insieme degli intorni. *Punto di minimo/massimo locale* (relativo) di una funzione. Punto di minimo/massimo locale stretto (o forte).
Esempio: lettura dei punti estremi (globali e locali) da un grafico.
Introduzione al concetto di limite mediante esempi:
i) limite di una successione a_n per n tendente a $+\infty$.
ii) limiti per una funzione reale definita su $\mathbf{R}\setminus\{2\}$ e rappresentata graficamente.
Nota 15Lez Pag.170-175

18/10/19 (2 ore): La retta reale estesa. Intorno di $-\infty$ e di $+\infty$. Punto di accumulazione. Punto isolato. Esempi.
Definizione (unificata) di limite di una funzione.
Commenti sulla definizione (unificata) di limite di una funzione. Casi particolare: $x_0\in\mathbf{R}$ e $l\in\mathbf{R}$; $x_0=+\infty$ e $l=-\infty$ (visto con l'esempio in ii)). Limite finito.
Calcolo di limiti usando la definizione: limite di x^2 per x tendente a 0. Lasciati per esercizio: limite di n^2 per n tendente a $+\infty$, limite di (n-1)/(n+1) per n tendente a $+\infty$.
Unicità del limite, se esiste. Esistenza del limite finito implica la locale limitatezza della funzione. Teorema della permanenza del segno.
Esempi di non esistenza del limite (funzioni oscillanti!).
Punto di accumulazione sinistro (destro). Intorno sinistro (destro). Limite sinistro (destro). Caratterizzazione del limite mediante il limite sinistro e limite destro. Esempio di non esistenza del limite (caso in cui il limite destro e il limite sinistro esistono ma non coincidono). Esempio di non esistenza del limite destro.
Nota 16Lez Pag.176-185

21/10/19 (2 ore): *Algebra dei limiti* (per limiti finiti). Applicazioni.
Parziale estensione dell'algebra dei limiti con limiti infiniti o nulli.
Dimostrazione del limite della somma. Calcolo di limiti usando l'algebra dei limiti e sua estensione parziale a R esteso.

Teorema del confronto (dei due carabinieri). Esempi. Forme indeterminate ($+\infty - \infty$; $0(+\infty)$, ∞/∞, $0/0$; e commento sulle forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0); strategie per "uscire dalla forma indeterminata".
Nota 17Lez Pag.186-194

22/10/19 (2 ore): **Esercitazione:** Immagine e funzione inversa. Funzione composta con funzioni definite a tratti. Funzioni trigonometriche inverse: disequazioni. Risoluzione di disequazioni con metodo grafico.
Limiti: usando la definizione; algebra dei limiti; algebra estesa dei limiti. Forme indeterminate ($+\infty - \infty$; $0(+\infty)$, ∞/∞, $0/0$); Limiti con il confronto.
Limiti notevoli delle funzioni trigonometriche.
Nota 5Es Pag. 39-44

24/10/19 (2 ore): *Teorema di esistenza del limite sinistro (destro) di funzioni monotone (dim. Esistenza del limite sinistro per una funzione crescente)*
Esistenza del limite o non. Applicazioni: comportamento delle funzioni elementari agli estremi del loro dominio; determinazione di inf e sup di insiemi senza l'uso della caratterizzazione.
Funzione continua in un punto. Funzione continua. Caratterizzazione della continuità con ε e δ. Continuità da destra e continuità da sinistra.
Somma, prodotto, rapporto di funzioni continue. Continuità di una funzione definita a tratti. Esempi.
Continuità delle funzioni potenze, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche e trigonometriche inverse (accennato). Limiti usando la continuità delle funzioni elementari. Limite della funzione composta. Qualche esempio.
Nota 18Lez Pag.195-204

25/10/19 (2 ore): Limite della funzione composta. La funzione composta di funzioni continue è continua. Esempi. Limiti di funzioni con i *Limiti notevoli delle funzioni trigonometriche.* Continuità per funzioni definite a tratti con limiti notevoli.
Infiniti a confronti (logaritmi, potenze ed esponenziali a confronto). Esempi.
Continuità di funzioni definite a tratti (usando la gerarchia degli infiniti).
Dimostrazione che $x/4^x$ tende a 0 per x tendente a $+\infty$. Dimostrazione della gerarchia degli infiniti ($\log_b x$, x^β, a^x per x tendente a $+\infty$). Corollari. Esercizi.
Limite di $f(x)^{g(x)}$, per f(x) positiva in un intorno di x_0. Forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0. Esercizi (limiti notevoli – dati per buono per ora – che possono essere utili in questo caso: $(e^x-1)/x$ tende a 1 per x tendente a 0; $[\log(1+x)]/x$ tende a 1 per x tendente a 0). Esercizi per i casi 0^0, ∞^0, 1^∞.
Nota 19Lez Pag.205-214

28/10/19 (2 ore): Continuità di funzioni definite a tratti (usando composizione/somma/prodotto di funzioni continue).). Esercizi per i casi 0^0, ∞^0, 1^∞.
Limiti di funzioni e limiti di successioni (teorema ponte). Non esistenza del limite e non solo. Esempi.
Limiti di alcune successioni (a^n, $a^{1/n}$, $n^{1/n}$, per n tendente a $+\infty$)
Limite di alcune successioni ($(\log_b n)/n^\beta$, n^β/a^n, $a^n/n!$, $n!/n^n$ per n tendente a $+\infty$). Gerarchia degli infiniti per successioni. Formula di Stirling.
La successione $(1+1/n)^n$ è strett. crescente e limitata; il suo limite è definito uguale a "e". Alcuni limiti legati ad e: vari corollari. Limiti notevoli: $(e^x-1)/x$ tende a 1 per x tendente a 0; $[\log(1+x)]/x$ tende a 1 per x tendente a 0. Esercizi.
Funzione *divergente* (o *infinita; un infinito*). Confronto di infiniti. *Infinito di ordine superiore (inferiore). Infinito dello stesso ordine ed infiniti non confrontabili. Funzioni asintotiche.*
Nota 20Lez Pag.215-226

29/10/19 (2 ore): **Esercitazione:** Continuità di funzioni definite a tratti (con e senza parametri).
Limiti di ogni specie.
Nota 6Es Pag. 45-51

31/10/19 (2 ore): Esempi di confronti di infiniti.
Funzione *infinitesima* e il simbolo o(1). Esempi. "Regole di calcolo" per o(1). Uso di o(1) per il calcolo di limiti.
Confronto di infinitesimi. *Infinitesimo di ordine superiore (inferiore).*
Infinitesimo dello stesso ordine ed infinitesimi non confrontabili. Funzioni asintotiche. Esempi (sin x, e^x-1, log(1+x) sono tutte funzioni asintotiche a x, per x tendente a 0). Stime asintotiche e grafici. Esercizi.
La notazione f(x)=o(g(x)) per x tendente a x_0. Significato di f(x)=o(g(x)), per x tendente a x_0, se entrambe le funzioni sono infinite (o entrambe sono infinitesime). Esempi.

"Regole di calcolo" per o(x^α) per x tendente a 0.
Nota 21Lez Pag.227-237

04/11/19 (2 ore): L'uso di questo linguaggio nel calcolo di limiti. Limiti con gli "o"-piccoli.
Ordine di infinitesimo (e infinito). Esempi.
Esempi di ordini di infinitesimo. Parte principale di un infinitesimo (rispetto all'infinitesimo x, per x che tende a 0, o rispetto all'infinitesimo (x-x_0), per x che tende a x_0.
Asintoti: orizzontali ed obliqui; verticali. Qualche esempio.
Punti di discontinuità.
Teoremi generali per le funzioni continue su un intervallo.
Permanenza del segno. *Teorema di esistenza degli zeri (enunciato).*
Nota 22Lez Pag.238-247

05/11/19 (2 ore): Cosa succede se viene a mancare una delle sue ipotesi? Dim. del teorema di esistenza degli zeri (metodo di bisezione).
Applicazione del teorema di esistenza degli zeri per la risoluzione di un'equazione del tipo f(x)=g(x). Corollario: se due funzioni continue f e g su [a,b] verificano f(a)>g(a) e f(b)<g(b) (o viceversa), allora esiste x_0 in]a,b[tale che f(x_0)=g(x_0).
Teorema dei valori intermedi (dim.)
Corollario: L'immagine di un intervallo tramite una funzione continua è ancora un intervallo.
Teorema di Weierstrass: esistenza del massimo e del minimo di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato [a,b].
Cosa succede se le ipotesi su f e su [a,b] vengono a mancare? A priori non si può dire nulla sull'esistenza di min e max: possono esserci massimo/minimo come possono anche non esserci. Esempi. Commento breve su dove possono 'cadere' eventuali punti di massimo/punti di minimo.
Nota 23Lez Pag.248-256

09/11/19 (2.30 ore): PRIMA PROVA INTERMEDIA

11/11/19 (2 ore): Monotonia e invertibilità: f continua e iniettiva su un intervallo I implica f strettamente monotona su I. Continuità della funzione inversa di una funzione continua e iniettiva su un intervallo.
Derivate. Rapporto incrementale. *Derivata di una funzione in un punto.* Derivata destra e derivata sinistra di una funzione in un punto. Funzione derivabile in un punto. Funzione derivabile in un insieme. La funzione derivata.
Teorema: *Se f è derivabile in un punto, è continua nel punto.*
Non vale il viceversa: |x| è continua in x=0, ma non derivabile in x=0.
Interpretazione geometrica della derivata e pendenza della *retta tangente al grafico di una funzione derivabile* (come retta 'limite' di rette secanti). Esempi.

Derivata di alcune funzioni elementari (potenze (reciproche ed inverse), x^α, esponenziale, logaritmo, seno, coseno). *Algebra delle derivate.*
Nota 24Lez Pag.257-268

12/11/19 (2 ore): **Esercitazione:** Limiti con o-piccoli; asintoti obliqui; esistenza degli zeri; teorema di Weierstrass; derivabilità e calcolo delle derivate usando l'algebra.
Nota 7Es Pag. 52-61

14/11/19 (2 ore): Dim. della derivata di $f(x)= x^2$ e $f(x)= e^x$

Derivata del prodotto (dim.). Ricerca dell'equazione della retta tangente per varie funzioni in vari punti dei loro grafici e la loro rappresentazione grafica.

Derivata della tangente (come derivata del rapporto).

Esercizi: calcolo della retta tangente al grafico di una funzione (per f(x)=x^3-x in x=-1, x=0, x=1 e la loro rappresentazione grafica) (lasciato per esercizio f(x)=x^2e^x in x=-2 e x=0).

Qualche esercizio di calcolo di derivate usando l'algebra delle derivate e la derivata delle funzioni elementari (prodotto e rapporto).

Derivabilità di f(x) = radice quadrata in x=0; di f(x) = radice cubica in x=0. Commenti vari sulla non-derivabilità di varie funzioni.

Comportamento delle funzioni $f(x)=x^3$, f(x)= radice cubica di x, f(x)= senx in un intorno di x=0 mediante la derivata in x=0 (e la tangente).

Punti di non derivabilità: punto angoloso, cuspide, punto con tangente verticale. Esempi.

Teorema: derivata della funzione composta. Casi speciali: e^(f(x)); log(|f(x)|); (f(x))^n. Qualche esercizio di calcolo.

Teorema: derivata della funzione inversa.

Nota 25Lez Pag.268-278

15/11/19 (2 ore): Teorema: derivata della funzione inversa (dim.)

Commento sulla derivata della funzione inversa nei casi in cui $f'(x_0)=0$ oppure $f'(x_0)= +\infty$ $(-\infty)$.

Es. Calcolo della derivata della funzione inversa in un punto di una funzione strettamente crescente e derivabile in **R** senza la determinazione analitica della funzione inversa. Derivata della funzione arctgx, arcsinx, arccosx (dim.fine lezione per i curiosi).

Esercizi vari sulla derivabilità.

E' stato visto ad esercitazione la derivabilità di varie funzioni usando la definizione di derivabilità (f(x)= xlog x per x> 0, e f(0)=0; una f(x) dipendente da parametri a e b da determinare tali che la funzione definita a tratti risulti derivabile, o con la presenza del valore assoluto ($f(x)= e^{-|x|}$)); ora usando anche il corollario importante del teorema di de l'Hopital (che sarà dimostrato successivamente):

Corollario (teorema de l'Hopital): (i) Sia f continua in un intorno destro (risp. sinistro) di x_0 (compreso il punto x_0) e derivabile per gli x a destra (risp. a sinistra) di x_0, con x diversi da x_0.

Se esiste $\lim_{x\to x\_0^+} f'(x)$ in **R** (eventualmente anche $-\infty$ o $+\infty$) allora esiste $f'_+(x_0)$ e vale $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x\_0^+} f'(x)$ (risp. per la derivata sinistra in x_0).

(ii) Sia f continua in un intorno di x_0 e derivabile per gli x diverso da x_0.

Se esiste $\lim_{x\to x\_0} f'(x)$, allora esiste $f'(x_0)$ e vale $f'(x_0)= \lim_{x\to x\_0} f'(x)$. In particolare, se $\lim_{x\to x\_0} f'(x)$ esiste finito, allora f è derivabile in x_0.

Estremi locali (= punti di min/max locali) e derivate: Punto critico (o stazionario) di una funzione.

Teorema di Fermat (dim.)

Teorema del valor medio o di Lagrange. Interpretazione geometrica.

Teorema di Rolle.

Nota 26Lez Pag.279-288

18/11/19 (2 ore): Dim. del teorema di Rolle e poi la dim. del teorema di Lagrange.

Controesempi al teorema di Rolle, se manca una delle sue ipotesi.

Teorema di Cauchy (dim).

Conseguenze del teorema di Lagrange:

a) se $f'(x)=0$ per ogni x dell'intervallo I, allora f è costante in I.

L'importanza che I sia un intervallo.

Applicazione: arctan x + arctan (1/x) = $\pi/2$ per ogni x in $]0,+\infty[$ ($-\pi/2$ per ogni x in $]-\infty,0[$.

b) Test di monotonia: segno di f’ in]a,b[e la monotonia di f in]a,b[.
L’importanza che I sia un intervallo.
Studio della natura dei punti critici di una funzione usando il segno della derivata nell’intorno dei punti critici.
I punti estremi (max/min) locali di una funzione continua f:[a,b] ⟶R sono da ricercare tra i punti critici, i punti di non-derivabilità e gli estremi dell’intervallo.
Studio qualitativo della funzione $f(x)=xe^{-x^2}$; massimo e minimo di f su [0,2].
Oss: Studio qualitativo di $g(x)=|x|e^{-x^2}$
Nota 27Lez Pag.289-297

Lasciato per esercizio: studio qualitativo delle funzioni f(x)=xlog x; $f(x)=(x-1)/(x^2+1)$; $f(x)= x/(x^2-4)$; f(x)=((x^3-1)/x)^(1/2); f(x)= arctg(|x-1|/x). Attenzione ai punti con tangente verticale o punti angolosi.
Nota 27Lez ALLEGATO Pag.298-302

19/12/19 (2 ore): **Esercitazione:** derivabilità usando corollario di de l’Hopital (con e senza parametri); derivata funzione composta (regola della catena); derivata funzione inversa; esercizi usando i teoremi di Rolle/Lagrange.
Studio qualitativo di funzioni (non convessità/concavità), cercando di mettere in risalto i punti cruciali di f(x)=radice di (1-|1-e^{2x}-1|) e f(x)=logx/(1+logx) (completato).
Nota 8Es Pag. 62-70

21/11/19 (2 ore): Commento allo studio qualitativo di f(x)=logx/(1+logx) (iniziato ad esercitazione e completato da me) e f(x)= arctg(|x-1|/x) (lasciato per esercizio; *vedi Nota 27Lez ALLEGATO*). Attenzione ai punti con tangente verticale o punti angolosi.
Determinare, al variare di k in **R**, il numero delle soluzioni dell’equazione
$e^x-x=k$.
Derivate successive. Derivata seconda e qualche calcolo.
Funzioni convesse (concave) e strettamente convesse (strett. concave). Rappresentazione grafica. Definizione di funzione convessa (concava) e strettamente convessa (strett. concava).
Esempio di funzione convessa che non è derivabili in qualche punto di I. Le funzioni potenze pari (visto per $f(x)= x^2$) sono funzioni strett. convesse in **R**.
Caratterizzazione delle funzioni convesse (strett. convesse) e derivabili su I.
Caratterizzazione delle funzioni convesse e derivabili 2 volte su I. Esempio: $f(x)=x^2$, $f(x)=e^x$ sono strettamente convesse su **R**. *Punto di flesso.*
Se f è derivabile due volte in un punto di flesso x_0 in]a,b[, allora $f''(x_0)=0$.
(non vale il viceversa: $f(x)=x^4$ in $x_0=0$).
Studio di funzione: schema per affrontare in generale lo studio qualitativo di una funzione. Studio qualitativo delle funzioni f(x)=x-1+2/(1+|x|/2).
Forme indeterminate 0/0 e ∞/∞ e il *Teorema di de l’Hopital (dim. caso 0/0).*
Limiti vari (bisogna usare con oculatezza il teorema di de l’Hopital).
Attenzione: a) La non-esistenza del limite di f’(x)/g’(x) non implica la non-esistenza del limite di f(x)/g(x).
Nota 28Lez ALLEGATO Pag.303-313

22/11/19 (2 ore): b) L’importanza di essere una forma indeterminata del tipo 0/0 e ∞/∞.
Teorema di de l’Hopital (dim. caso 0/0).
Corollario importante del teorema di de l’Hopital per lo studio della derivabilità o non di una funzione in un punto (vedi lezione del 15/11/19, dim. caso i)).
Attenzione: a) E’ fondamentale la continuità della f in x_0.
b) Può capitare che $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ non esista, ma che la funzione f sia derivabile comunque in x_0. Esempio: f(x) definita da x^2sen (1/x) per x diverso da 0 e 0 per x=0.
Calcolo di limiti usando de l’Hopital e non solo...
Il problema dell’approssimazione di una funzione in un intorno di un punto mediante polinomi: polinomio di Taylor.

Introduzione degli sviluppi di Taylor centrati nello zero delle funzioni elementari a partire dai limiti notevoli. Approssimazione di e^x vicino a $x_0=0$ con il polinomio di Taylor di ordine n: rappresentazione grafica per n=0, 1,..., 8; approssimazione di sinx vicino a $x_0=0$ con il polinomio di Taylor di ordine n: rappresentazione grafica per n=1, 3, 5, 7, 9, 13.
Teorema (*Formula di Taylor con il resto di Peano*). *Polinomio di Taylor di ordine n associato ad f e centrato nel punto x_0*; è l'unico polinomio $P_n(x)$ tale che $f(x)= P_n(x) + o((x-x_0)^n)$.
Nota 29Lez Pag.314-321

25/11/19 (2 ore): Commenti vari sul polinomio di Taylor; unicità del polinomio; Esercizi.
Calcolo del polinomio di Taylor $P_n(x)$ di ordine n centrato in $x_0=0$ delle seguenti funzioni: e^x, log(1+x), sinx, cosx, tgx, arctan x, $(1+x)^\alpha$.
Es. Calcolo di polinomi di Taylor di ordine 3 centrati in $x_0=0$ di qualche funzione composta. Calcolo di qualche limite usando gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari in $x_0=0$.
Nota 30Lez Pag.322-330

26/11/19 (2 ore): **Esercitazione:** Calcolo di polinomi di Taylor di ordine 3, 4, 5 centrati in $x_0=0$ di qualche funzione composta. Determinazione della parte principale e dell'ordine di infinitesimo di un infinitesimo. Limiti usando gli sviluppi di Taylor (con il resto di Peano). Limiti con de l'Hopital.
Nota 9Es Pag. 71-77

28/11/19 (2 ore): Traccia di dim. del Teorema di Taylor con resto di Peano.
Calcolo del polinomio di Taylor con resto di Peano in punti $x_0\neq 0$.
Individuazione del grafico di una funzione in un intorno di $x_0=0$ conoscendo il suo sviluppo di Taylor. Calcolo di limiti di forme indeterminate 0/0 in 0 (con parametro) usando gli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari in $x_0=0$.
Teorema (*Formula di Taylor con il resto di Lagrange*) (enunciato). Dim. che $\cos x > 1-x^2/2$ per ogni x diverso da 0. Il numero di Nepero e come serie di 1/n!
Stime del valore di e (tramite l'uso dello sviluppo di Taylor di e^x, per x=1, con il resto di Lagrange). La funzione e^x come serie di $x^n/n!$ per ogni x in R. Analogamente si ottiene lo sviluppo in serie delle funzioni trigonometriche su tutto R (funzioni analitiche).
Introduzione alle serie. Sommando infinite quantità positive possiamo ottenere una somma finita?
Motivazione euristica del fatto che $1+1/2+1/4+...+1/2^n +...$ abbia somma finita uguale a 2, e motivazione geometrica che $1/2+1/4+...+1/2^n +...$ abbia somma finita uguale a 1. Definizione di *serie numerica*. Notazione.
Nota 31Lez Pag.331-340

29/11/19 (2 ore): Successione delle *somme parziali*. Carattere di una serie (convergente, divergente, indeterminata o irregolare).
La serie $\Sigma 1/2^n$ come esempio di serie convergente e somma 2; la serie Σn come esempio di serie divergente positivamente; la serie $\Sigma(-1)^n$ come esempio di serie indeterminata.
La serie geometrica Σq^n. La serie $\Sigma 1/2^n$ come caso particolare.
Prova che 0.999... =1. La serie Σ1/(radice di n). Caso particolare della serie armonica generalizzata $\Sigma 1/n^\alpha$ per ogni α. La serie di Mengoli $\Sigma 1/n(n+1)$ come caso particolare delle serie telescopiche $\Sigma(b_n- b_{n+1})$.

La serie $\Sigma 1/n!$. Commenti sul carattere della serie $\Sigma(a_n+b_n)$ a partire dal carattere delle serie Σa_n e Σb_n. Cosa succede per $\Sigma a_n b_n$?
Criteri di convergenza per serie numeriche:

Teorema: Condizione necessaria affinchè una serie Σa_n sia convergente, è che la successione $\{a_n\}$ sia infinitesima.

Tale condizione non è sufficiente: Σ1/(radice di n) è una serie divergente nonostante 1/(radice di n) sia un infinitesimo per n tendente a $+\infty$.

Teorema: Condizione necessaria affinchè una serie Σa_n sia convergente, è che il la successione delle code della serie sia infinitesima (senza dim.).

Applicazione: La serie armonica $\Sigma 1/n$ è divergente.
Nota 32Lez Pag.341-347

02/12/19 (2 ore): *Criteri di convergenza per serie a termini non-negativi*: *Criterio del confronto* (dim).

La serie $\Sigma 1/n^{\alpha}$ per ogni α (manca la dim. per $1<\alpha<2$). *Criterio del confronto asintotico* (per serie a termini positivi) (dim.). Qualche esempio. La serie $\Sigma 1/n^{\alpha}$ e la serie $\Sigma 1/[n^{\alpha}(\log n)^{\beta}]$. Esercizi usando il criterio del confronto asintotico.
Criterio della radice n-esima (con dim.). *Criterio del rapporto* (senza dim.).
Esercizi usando il criterio del confronto asintotico, il criterio della radice n-esima e il criterio del rapporto.
Nota 33Lez Pag.348-357

03/12/19 (2 ore): **Esercitazione:** Esercizi usando il criterio del confronto asintotico, il criterio della radice n-esima e il criterio del rapporto.
Nota 10Es Pag. 78-85

03/12/19 (2 ore): *Serie a termini di segno variabile:* serie assolutamente convergente. Criterio della convergenza assoluta (convergenza assoluta implica convergenza). La serie serie $\Sigma(-1)^n/n$ (esempio di serie convergente ma non assolutamente convergente). La convergenza di tale serie segue dal criterio di Leibniz per le serie a segno alterno.
Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibniz. Esercizi.
Varie osservazioni sulla convergenza assoluta, convergenza (semplice) e il criterio di Leibniz. Esercizi vari usando il criterio di Leibniz.
Esempio di serie che non soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz ed è divergente; di serie che non soddisfa le ipotesi del criterio di Leibniz ma è convergente assolutamente; di serie che non soddisfa il criterio di Leibniz, che non è assolutamente convergente ma convergente (semplicemente).
Serie dipendenti da un parametro (o serie di funzioni). Esercizi.
Serie di potenze. Definizione ed def. insieme di convergenza. La serie geometrica come caso particolare di una serie di potenze.
Nota 34Lez Pag.358-367

05/12/19 (2 ore): Esercizio modello. Insieme di convergenza e raggio di convergenza.

Teorema: Se r è il raggio di convergenza della serie $\Sigma a_n(x-x_0)^n$, allora la serie converge assolutamente per ogni x tale che $|x-x_0|< r$, e non converge per ogni x tale che $|x-x_0|> r$. Nulla si può dire a priori sulla convergenza della serie nei punti $x = x_0 - r$ e $x= x_0 + r$.
Teorema: Criterio per la determinazione del raggio di convergenza per la serie $\Sigma a_n(x-x_0)^n$.
Esercizi sulla determinazione del raggio di convergenza di alcune serie di potenze. Determinazione dell'insieme di convergenza per serie di potenze o serie riconducibili a serie di potenze.

Serie di Taylor. Ogni serie di Taylor per funzioni $C^{+\infty}(]a,b[)$ è convergente? Se essa è convergente, allora la sua somma coincide con la funzione stessa? Funzione sviluppabile in serie di Taylor. Le funzioni e^x, sin x, cos x log(1+x) e arctan x sono sviluppabili in serie di Taylor con centro 0.
Nota 35Lez Pag.368-376

06/12/19 (2 ore): *Integrazione – Integrale di Riemann.* Introduzione:
a) il problema di trovare una buona definizione di 'area' per una regione piana sottografico di una funzione;
b) il problema di trovare un algoritmo facile per calcolare poi tale area.
Il problema della primitiva. Funzione integrale.
Archimede e il metodo di esaustione: calcolo dell''area' del sottografico di $f(x)=x^2$ sul segmento [0,b].
Suddivisione D di [a,b]. *Somma inferiore di* f *relativa alla suddivisione D denotata s(D,* f*). Somma superiore di* f *relativa alla suddivisione D denotata S(D,* f*).* Proprietà di *s(D,* f*) e S(D,* f*).*
Funzione integrabile (secondo Riemann). Integrale di Riemann per funzioni limitate su [a,b]. Esempio di funzione non-integrabile su [a,b] (la funzione di Dirichlet). Classi di funzioni integrabili: le funzioni monotone su [a,b]; le funzioni continue su [a,b]; funzioni generalmente continue su [a,b].
L'integrale e l'area. Interpretazione geometrica dell'integrale. Calcolo di qualche integrale usando l'interpretazione geometrica dell'integrale.
Proprietà dell'integrale: linearità dell'integrale rispetto alla funzione integranda; monotonia, additività dell'integrale rispetto all'intervallo d'integrazione (formula di spezzamento).
Teorema della media integrale: Se f è una funzione continua su [a,b], allora esiste $c\in[a,b]$, tale che f(c)=media integrale di f su [a,b]. Interpretazione geometrica.
Funzione primitiva. Definizione e qualche esempio. Osservazioni sulle primitive:
1) se F(x) è una primitiva di f(x), allora anche F(x)+c lo è per ogni $c\in\mathbf{R}$;
2) se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ sono due primitive di f(x) su un intervallo I, allora $F_1(x) = F_2(x)+ c$.
3) dal TFC e da 2) segue che se F(x) è una primitiva di una funzione continua f(x) su un intervallo I, allora $F(x)= F_a(x) + c$, dove $F_a(x)$ è la funzione integrale di f relativa al punto a in I.
Funzione integrale $F_c(x)$ *di* f *relativa ad un punto* c in I
Es: Sia f definita su [a,b]. Tracciare un grafico qualitativo di $F_a(x)$ usando l'interpretazione geometrica dell'integrale (molto velocemente! Vedremo altri esempi nella prossima lezione).
Nota 36Lez Pag.377-387

09/12/19 (2 ore): La funzione integrale.
Teorema fondamentale del Calcolo Integrale (TFC): Se f(x) è continua in I, $c\in I$, allora la funzione integrale $F_c(x)$ è una primitiva di f (Dim.)
Oss: La funzione integrale ha sempre un grado di regolarità in più rispetto alla funzione integranda.
Es: Determinazione del grafico della funzione integrale $F_0(x)$ relativa alla funzione $f(x)=e^{-x^2}$ vicino a x=0.
Calcolo di limiti con la funzione integrale (usando de l'Hopital e gli sviluppi di Taylor). Formula della derivata della funzione integrale con estremi funzioni di x.
Esercizi vari sulla funzione integrale (Polinomio di Taylor, punti critici e loro natura).
Teorema di Torricelli-Barrow (dim.) Esercizi.
Oss.: Abbiamo visto che se F(x) è una primitiva di una funzione continua f(x) su I, allora $F(x)= F_a(x) + c$, dove $F_a(x)$ è la funzione integrale di f relativa al punto a in I. Questo fatto porta all'introduzione del concetto di *integrale indefinito* $\int f(x)dx$ come insieme di tutte le primitive di f rispetto alla variabile x.

Oss: Attenzione: non confondere i concetti di integrale definito di f (è un numero reale), di funzione integrale di f (è una funzione) e di integrale indefinito di f (è un simbolo che denota l'insieme delle funzioni primitive di f).
Tabella delle primitive immediate (e quasi).
Oss. Nonostante ogni funzione continua abbia sempre primitiva, non è detto che tale primitiva si possa esprimere mediante funzioni elementari. Es. e^{-x^2}, (sinx)/x, (cosx)/x, $\sin x^2$.
Esercizi vari: calcolo di integrali definiti immediati o quasi. Calcolo dell'area di un sottografico; calcolo di aree di regioni piane delimitate da grafici di funzioni.
Nota 37Lez Pag.388-398

10/12/19 (2 ore): Calcolo dell'area di una regione piana.
Alcuni metodi utili per il calcolo di primitive (non immediate, o quasi):
Formula d'integrazione per parti; esercizi.
Formula d'integrazione per sostituzione; esercizi. Qualche sostituzione speciale (t=tg(x/2) ossia x=2arctg t)
Integrazione di funzioni razionali (al denominatore polinomio di grado minore o uguale a 2).
Nota 38Lez Pag.399-408

10/12/19 (2 ore): **Esercitazione:** Serie di potenze. Funzione integrale (punti critici; concavità/convessità). Integrali definiti immediati (o quasi); integrazione per parti; integrazione per sostituzione. Integrazione di funzioni razionali.
Nota 11Es Pag.86-93

12/12/19 (2 ore): Qualche sostituzione speciale (x=sinht). Le funzioni iperboliche.
Integrali generalizzati (o impropri).
Integrazione per funzioni non limitate: Funzione integrabile (in senso improprio o generalizzato) in [a,b[e integrale convergente (divergente positivamente, divergente negativamente, che non esiste). Analoghe definizioni su]a,b].
Esempi: integrabilità di $1/x^{\alpha}$ su]0,1]; più in generale di $1/(x-a)^{\alpha}$ su]a,b], di $1/(b-x)^{\alpha}$ su [a,b[. Integrabilità di $1/[x(-\log x)^{\beta}]$ su]0,1/2].
Integrazione per funzioni su intervalli illimitati: Funzione integrabile (in senso improprio o generalizzato) in [a,+∞[e integrale convergente (divergente positivamente, divergente negativamente, che non esiste). Analoghe definizioni su]-∞,b].
Nota 39Lez Pag.409-417

13/12/19 (2 ore): Esempi: integrabilità di $1/x^{\alpha}$ su [1,+∞[; integrabilità di $1/[x(\log x)^{\beta}]$ su [2,+∞[.
Qualche studio di convergenza usando la definizione. Estensione del concetto di integrale generalizzato su]a,b[(possibilmente anche]-∞,+∞[).
Criteri di convergenza: *Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico.*
Esercizi.
Funzioni assolutamente integrabili.
Esercizi sull'integrabilità usando il criterio del confronto e del confronto asintotico.
Nota 40Lez Pag.418-429

16/12/19 (2 ore): Esercizi sugli integrali generalizzati.
Serie e integrali generalizzati. Convergenza della serie armonica generalizzata $\sum 1/n^{\alpha}$ se $\alpha > 1$. Convergenza della serie $\sum 1/[n(\log n)^{\beta}]$ se $\beta > 1$.
Esercizi. L'integrabilità della funzione gaussiana $e^{(-x^2)}$ su [0,+∞[.
Equazioni differenziali ordinarie di ordine n. Eq. diff. in forma normale. Integrale generale di un'equazione differenziale.
Esempi di integrali generali: y'(x)=g(x); y'(x)=ay(x).
Nota 41Lez Pag.430-441

17/12/19 (2 ore): $y'(x)=ay(x)$ (il modello di Malthus della dinamica di una popolazione isolata), $y'(x)=2y(x)+x$; $y''(x)=x$.
Il problema di Cauchy per $y'(x)=f(x,y(x))$. Il problema di Cauchy per $y''(x)=f(x,y(x),y'(x))$. Esempi. Osservazioni: esistenza 'locale' (esistenza locale per $y'(x)= y^2(x)$ con $y(0)=1$) e non unicità della soluzione di un problema di Cauchy ($y'(x)=3y^{2/3}$ con $y(0)=0$).
Teorema: Esistenza 'locale' ed unicità di una soluzione di un problema di Cauchy (solo enunciato)

Metodo risolutivo per equazioni differenziali a variabili separabili: $y'(x)=h(x)g(y(x))$.
Esempi (eq. differenziali di variabili separabili): L'integrale generale di $y'(x)=3y(x)$; $y'(x)=y^2(x)$; $y'(x)=e^{-y(x)}$; $y'(x)=-2x(y(x)-1)$.

Metodo risolutivo per eq. diff. lineari del primo ordine a coefficienti variabili: $y'(x)=a(x)y(x)+b(x)$. Integrale generale dell'equazione omogenea. Integrale generale dell'equazione completa $y'(x)=a(x)y(x)+b(x)$ come somma dell'integrale generale dell'equazione omogena e di una soluzione particolare dell'equazione completa. Esercizi: Problema di Cauchy $y'(x)-y(x)=1$, $y(0)=0$.
Integrale generale di $y'(x)=2y(x) + x$; $y'(x)=(1/x)y(x)+x^2+1$ (lasciati per esercizio).
Nota 42Lez Pag.442-453

19/12/19 (2 ore): Problema di Cauchy $y'(x)=y(x)+ \sin x$, $y(0)=0$. Integrale generale di $y'(x) + (\cos x/\sin x)y(x)-e^{-x}=0$; $y'(x) =1/(x^{(1/2)})y(x)+1$.

Metodo risolutivo per eq. diff. lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: Caso omogeneo.
Esercizi: Integrale generale di $y''=y$; $y''-2y'+y=0$; $y''=-y$; $y''+2y+4y=0$
Metodo risolutivo per eq. diff. lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: Caso completo.
Integrale generale di $y''-y =x^2+x$; $y''-y' =x^2+x$.
Nota 43Lez Pag.454-463

20/12/19 (2 ore): *Metodo risolutivo per eq. diff. lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: Caso completo.* Esercizi.
Integrale generale di $y''-4y'+3y= 3e^{2x}$; $y''-4y'+3y= 4e^{x}$.
Integrale generale di $y''+y'+y= \sin x$; $y''+4y=3\cos 2x$.
Nota 44Lez Pag.464-468

E_per_finire_:Studio qualitativo di funzioni. Limiti (con Taylor e con de l'Hopital). Polinomio di Taylor e sviluppi di Taylor. Serie numeriche e serie riconducibile a serie di potenze. Integrale improprio.
Nota 45Lez_e_per_finire Pag.469-475

21/12/19 (2.30 ore): Seconda Prova Intermedia