

10.1) Determinate il polinomio di Taylor di ordine 4, centrato in  $x_0 = 0$ , delle funzioni

i)  $f(x) = (e^{-x} - 1) \sin 2x$ ;    ii)  $f(x) = \log(1 - \frac{x^2}{2})$ ;    iii)  $f(x) = (e^{2x} - 1)^3$ .

10.2) Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale rispetto all'infinitesimo campione  $x$ , per  $x \rightarrow 0^+$ , delle seguenti funzioni:

i)  $f(x) = (x - x^2)(\cos 2x - 1) + 2x \log(1 + x^2)$ ;    ii)  $f(x) = \log(\cos x) + \frac{1}{2} \sin^2 x$ .

10.3) Calcolate i seguenti limiti usando gli sviluppi di Taylor:

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos \frac{1}{x} - e^{\frac{1}{x^2}}}{\arctan \frac{1}{x^2}}$ ;    ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} - (1+x)^3}{x(\sqrt{1+x} - 1)}$ ;    iii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}}{\log(1 + \frac{1}{x^3})}$ ;    iv)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{\sqrt{x} \log^2 x}$ .

10.4) Determinate, al variare di  $\alpha \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha > 0$ , i seguenti limiti:

i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{-x} - 1) \sin 2x + \log(1 - \frac{x^2}{2}) + \frac{5}{2}x^2}{\cos x^\alpha - 1}$ ;    ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3xe^x - \sin(\log(1+x)) - 2x - \frac{7}{2}x^\alpha}{\sin x^3}$ .

10.5) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 2 di  $f(x) = e^{-x^2}$  centrato in  $x_0 = 1$ .

10.6) a) Rappresentate graficamente  $f(x) = \sqrt{1+x} - \sin \frac{x}{2} - 1$  in un intorno di  $x_0 = 0$ .

b) Sia  $f(x) = -x^2 + 3x^3 - o(x^3)$  per  $x \rightarrow 0$ . Determinate  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  e  $f'''(0)$ .

10.7) a) Determinate gli  $\alpha \in \mathbf{R}$  tali che la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{2|\alpha| - 4}{|\alpha| + 2} \right)^n$  risulti convergente. Per tali  $\alpha$  determinate la somma.

b) Discutete la convergenza della serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$ . Determinate la somma.

10.8) Discutete il carattere delle seguenti serie:

a)  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + n^2}{3^n + n}$ ;    b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^6 + \log n + 3^n}{2^n + n^4 + \log^5 n}$     c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{n} \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}$ .

10.9) Determinate gli  $\alpha \in \mathbf{R}$  tali che le seguenti serie risultino convergenti:

a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1 + \arctan n^\alpha)$ ;    b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} + \sin \frac{1}{n} \right) n^\alpha$ .

10.10) Discutete la convergenza delle seguenti serie:

i)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{a}{4} \right)^n$ , al variare di  $a > 0$ ;    ii)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{a}{4} \right)^n$ , al variare di  $a > 0$ ;  
 iii)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n^2}}{(n!)^n}$ ;    iv)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{100}}{3^n}$ ;    v)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \left( \frac{n+2}{n} \right)^{n^2}$ ;    vi)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{n^2 + |\cos n|}$ .