

11.1) ... da fare ad occhi chiusi ... Determinate il carattere delle seguenti serie:

$$\begin{array}{llll} \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3+1}}; & \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+3}; & \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-\sin n}{n(n+1)}; & \text{iv)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan n}{2^n+3}; \\ \text{v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^\alpha(n+1)}}; & \text{vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{n^{2\alpha}+1}; & \text{vii)} \sum_{n=0}^{\infty} (2\alpha+3\alpha^2)^n & \text{al variare di } \alpha \in \mathbf{R}. \end{array}$$

Soluzione

11.2) Determinate il carattere delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n^4}{n^2+n}; \quad \text{ii)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\log n}; \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(\frac{n+3}{n+1})}{n}; \quad \text{iv)} \sum_{n=1}^{+\infty} [\log(1+\frac{3}{n}) - \frac{\alpha}{n}] \sqrt{n} \quad \text{al variare di } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Soluzione Soluzione

11.3) Determinate il carattere delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+2^n}{n!}; \quad \text{ii)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{n|\alpha|-n}}{n \log^2 n} \quad \text{al variare di } \alpha \in \mathbf{R}.$$

Soluzione

11.4) Determinate, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, il carattere di a_n e di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per

$$\text{i)} a_n = \frac{2^{n\alpha}}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}; \quad \text{ii)} a_n = \frac{(n+2)^\alpha}{n^2+2n}.$$

Soluzione Soluzione

11.5) a) Determinate, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(e^{\alpha^2}-1)^n}{n^3 e^n}$.

b) Determinate, al variare di $\alpha > -2$, il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |\log(2+\alpha)|^n$.

Soluzione

11.6) Discutete la convergenza delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n(1+\log^{\frac{5}{4}} n)}; \quad \text{ii)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha^2+\frac{1}{2}} (\log n)^{\alpha+\frac{3}{4}}}.$$

Soluzione

11.7) Studiate la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n\sqrt{\log n}}; \quad \text{ii)} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}}{n\sqrt{\log n}}.$$

Soluzione

11.8) Studiate la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) delle seguenti serie:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2+n\pi)}{n+3}; \quad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi/2+n\pi)}{n^2+1}.$$

Soluzione

11.9) Determinate, al variare di $x \in \mathbf{R}$, la convergenza assoluta e la convergenza (semplice) della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n (\arctan x)^n}{(n + \sin n) \pi^n}.$$

Soluzione

11.10) Determinate il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\text{i)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n\sqrt{n}+1)2^n}; \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - \frac{1}{n})^{2n^2}}{n^2} x^n; \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n + \sqrt[3]{n}}.$$

Soluzione

11.11) Determinate l'insieme di convergenza delle seguenti serie (serie di potenze e serie riconducibili a serie di potenze):

$$\begin{aligned} \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}; \quad & \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n x^n; \quad & \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-2} \frac{(2x)^n}{n}; \quad & \text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n!}{(4n+1)!} x^n; \\ \text{v)} \sum_{n=1}^{\infty} n(x-2)^n; \quad & \text{vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{3n^2+4} (x-3)^n; \quad & \text{vii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1} (2 - \log x)^n; \\ \text{viii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n+1} x^n; \quad & \text{ix)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n; \quad & \text{x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n}{4^n+1} \left(\frac{x+2}{x^2-2x+3}\right)^n. \end{aligned}$$

Soluzione

11.12) Determinate l'insieme di convergenza delle seguenti serie (riconducibili a serie di potenze):

$$\text{i)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2x-1)^n}{n(\log n^2)}; \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n (\log x)^n; \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{+\infty} (e^n + \pi^n) x^{2n}.$$

Soluzione