

Qui in seguito sono proposti alcuni esercizi (raccolti per tipologia) su questi argomenti visti a lezione. Potete trovare ulteriori esercizi in materiale didattico-on-line, nell'a.a. 2014/15 Esercizi-9-09-12.

12.1) a) Determinate per quali valori di $a, b \in \mathbf{R}$ risulta derivabile su \mathbf{R} la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x (e^{-t^2} + t) dt & \text{se } x > 0 \\ a^2 \sin x + b & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

b) Calcolate il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2} \int_0^{\log^2(1+2x)} \sqrt[3]{1+t^2} dt.$$

Soluzione

12.2) i) Provate che la funzione $F(x) = \frac{x}{2} \sqrt{4+x^2} + 2 \log\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4+x^2}\right)$ è una primitiva della funzione $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ su \mathbf{R} .

ii) Calcolate $\int_0^1 f(x) dx$.

iii) Calcolate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - 2x}{x^3}$.

Soluzione

12.3) Usando la tabella delle primitive elementari (o quasi immediate), determinate le primitive delle seguenti funzioni:

$$\text{i) } f(x) = \cos 3x + e^{-2x}; \quad \text{ii) } f(x) = \frac{(\log x)^3}{x} - x2^{x^2}; \quad \text{iii) } f(x) = \frac{1}{1+4x^2} + \frac{2}{1-x}.$$

Soluzione

12.4) Calcolate i seguenti integrali quasi immediati (confrontate l'esercizio con l'esercizio 12.3):

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} - \log^2 x}{2x} dx; \quad \int \frac{x}{x^2+1} dx; \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx; \quad \int \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}} dx; \quad \int \frac{1}{\cos^2 2x} dx.$$

Soluzione

12.5) Calcolate i seguenti integrali immediati (dopo aver fatto piccole operazioni algebriche e ricordato la definizione di valor assoluto!)

$$\int_1^2 \frac{x^3 - 2x + e}{x} dx; \quad \int_0^2 \frac{9^x - 1}{3^x + 1} dx; \quad \int_{-1}^4 |x^2 - 2x| dx; \quad \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx.$$

Soluzione

12.6) Calcolate per parti i seguenti integrali:

$$\int x \arcsin x dx; \quad \int x^4 \log 2x dx; \quad \int (2x+1)^2 e^x dx; \quad \int x^3 e^{-x} dx; \quad \int \log(1+x^2) dx.$$

Soluzione

12.7) Calcolate i seguenti integrali usando delle sostituzioni opportune (e integrando eventualmente poi funzioni razionali oppure per parti):

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} dx; \quad \int \sqrt{4-x^2} dx; \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx; \quad \int \frac{1}{\cos x} dx; \quad \int \sqrt{2+x^2} dx.$$

Soluzione

12.8) Determinate i seguenti integrali di funzioni razionali:

$$\int \frac{1}{2x - 4x^2} dx; \quad \int \frac{x + 3}{x^2 + 2} dx; \quad \int \frac{x + 1}{x(x - 2)} dx; \quad \int \frac{3x^3 + x^2}{x + 1} dx; \quad \int \frac{1}{x^2 + x + 2} dx.$$

Soluzione

12.9) Studiate brevemente la funzione $f(x) = -xe^{x^2} + e$ e tracciate un suo grafico qualitativo. Determinate l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f e dalle rette di equazione $x = 0$ e $y = 0$.

Soluzione

12.10) Studiate la funzione integrale $F(x) = \int_0^x (e^{2t^2} - 4e^{t^2} + 5)dt$ su \mathbf{R} : segno, monotonia, concavità/convessità di F .

Soluzione