Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica e CdL in Ingegneria Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

a.a. 2019-20 - Esercizi Paradigma 13 - presi da ESERCIZI 14-15 Es10 e PIAZZA 17-18 Es15

"..."stiamo per convergere .... - integrali impropri"..."

13.1) i) Calcolate il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_{2x}^{x^2} \sqrt{1-t^2}dt + 2x - x^2}{x^3}\,.$$

ii) Determinate l'ordine d'infinitesimo e la parte principale, per $x \to 0$, dell'infinitesimo $f(x) = \sin x - \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

13.2) Usando la definizione, calcolate i seguenti integrali impropri

$$\text{i)} \int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+4)^4}}\, dx\,; \qquad \text{ii)} \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx\,; \qquad \text{iii)} \int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)}\, dx\,.$$

13.3) Discutete la convergenza dei seguenti integrali impropri

$$\text{i)} \int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\tan x}\, dx\,; \qquad \text{ii)} \int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3x+1}}}\, dx\,.$$

13.4) Determinate per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta convergente l'integrale generalizzato

$$\text{i)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{[x(x+1)]^\alpha}\, dx\,; \qquad \text{ii)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x + \arctan\sqrt{x}}{|x+1|^\alpha x^{2\alpha}}\, dx\,;$$

$$\text{iii)} \quad \int_{-\infty}^0 \frac{\arctan\sqrt{|x|}}{|x-1|^{3\alpha}|x|^{\alpha+1}}\, dx\,; \qquad \text{iv)} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sqrt[4]{(x-x^2)^\alpha}}\, dx\,.$$

13.5) Determinate $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che risulti convergente l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1 - \alpha\sin x}{x^2}\, dx\,.$$

13.6) Discutete la convergenza dei seguenti integrali generalizzati. Calcolate poi, usando la definizione, i loro valori.

$$\text{i)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\, dx\,; \qquad \text{ii)} \int_{-\infty}^1 \frac{3}{x^2+2x+3}\, dx\,.$$

13.7) Discutete la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\text{i)} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt[3]{x}}\, dx\,; \qquad \text{ii)} \int_0^1 \frac{\sin\sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2}\arctan\sqrt[4]{x}} dx\,.$$

13.8) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha > 0$, per i quali i seguenti integrali impropri convergono:

$$\text{i)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx\,; \qquad \text{ii)} \int_0^{+\infty} \frac{(x+1-\cos x)^{3\alpha}\arctan(x^{-3})}{(x^2+x)^{\frac{\alpha}{3}}\arctan x^2} dx\,.$$

13.9) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha > 0$, tali che risultino convergenti i seguenti integrali impropri:

$$\text{i)} \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{1-x}}{(\tan\sqrt{1-x})(1-\cos x^{2\alpha})}\, dx\,; \qquad \text{ii)} \int_1^3 \frac{e^{\sqrt[3]{3-x}} - 1}{\sqrt{(x-1)^{4\alpha}(3-x)^{2\alpha}}} dx\,.$$