

13.1) i) Calcolate il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_{2x}^{x^2} \sqrt{1-t^2} dt + 2x - x^2}{x^3}.$$

ii) Determinate l'ordine d'infinitesimo e la parte principale, per $x \rightarrow 0$, dell'infinitesimo $f(x) = \sin x - \int_0^x e^{-t^2} dt$.

Soluzione

13.2) Usando la definizione, calcolate i seguenti integrali impropri

$$\text{i) } \int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+4)^4}} dx; \quad \text{ii) } \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx; \quad \text{iii) } \int_{\frac{1}{4}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4x+1)} dx.$$

Soluzione

13.3) Discutete la convergenza dei seguenti integrali impropri

$$\text{i) } \int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\tan x} dx; \quad \text{ii) } \int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-2}\sqrt{3x+1}} dx.$$

Soluzione

13.4) Determinate per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta convergente l'integrale generalizzato

$$\begin{aligned} \text{i) } & \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2}}{[x(x+1)]^\alpha} dx; & \text{ii) } & \int_0^{+\infty} \frac{x + \arctan \sqrt{x}}{|x+1|^\alpha x^{2\alpha}} dx; \\ \text{iii) } & \int_{-\infty}^0 \frac{\arctan \sqrt{|x|}}{|x-1|^{3\alpha} |x|^{\alpha+1}} dx; & \text{iv) } & \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\sqrt[4]{(x-x^2)^\alpha}} dx. \end{aligned}$$

Soluzione

13.5) Determinate $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che risulti convergente l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1 - \alpha \sin x}{x^2} dx.$$

Soluzione

13.6) Discutete la convergenza dei seguenti integrali generalizzati. Calcolate poi, usando la definizione, i loro valori.

$$\text{i) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx; \quad \text{ii) } \int_{-\infty}^1 \frac{3}{x^2+2x+3} dx.$$

Soluzione

13.7) Discutete la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\text{i) } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad \text{ii) } \int_0^1 \frac{\sin \sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x^2} \arctan \sqrt[4]{x}} dx.$$

Soluzione

13.8) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha > 0$, per i quali i seguenti integrali impropri convergono:

$$\text{i) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx; \quad \text{ii) } \int_0^{+\infty} \frac{(x+1-\cos x)^{3\alpha} \arctan(x^{-3})}{(x^2+x)^{\frac{\alpha}{3}} \arctan x^2} dx.$$

Soluzione

13.9) Determinate i valori di $\alpha \in \mathbf{R}, \alpha > 0$, tali che risultino convergenti i seguenti integrali impropri:

$$\text{i) } \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{1-x}}{(\tan \sqrt{1-x})(1-\cos x^{2\alpha})} dx; \quad \text{ii) } \int_1^3 \frac{e^{\sqrt[3]{3-x}} - 1}{\sqrt{(x-1)^{4\alpha}(3-x)^{2\alpha}}} dx.$$

Soluzione