Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica e CdL in Ingegneria Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

a.a. 2019-20 - Esercizi Paradigma 1 - *"Linguaggio, insiemi e numeri reali"*

1.1) Dite quali delle seguenti proposizioni sono vere e quali sono false (motivando la risposta, provando, per esempio, che la negazione è una proposizione vera o falsa):

a) $\forall x \in \mathbf{Z}\,, \exists y \in \mathbf{N}:\ x - y \leq 0\,;$ b) $\forall x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{Z}:\ 4x + 2y = 0\,;$

c) $\forall x \in \mathbf{N}, \exists y \in \mathbf{Z}:\ 2x - 4y = 0\,;$ d) $\forall x, y \in \mathbf{R}\,, [(x \neq y) \Longrightarrow (x^2 \neq y^2)]\,;$

e) $\exists x \in \mathbf{Q} : \forall y \in \mathbf{R}, (2x+1)y = 0\,;$ f) $\forall x \in \mathbf{Z}, \exists y \in \mathbf{N}:\ (y+1)x \geq 0\,.$

Soluzione

1.2) Siano dati gli insiemi $A = [-2, 5[,\quad B =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[\quad$ e $\quad C = \{-1, 2\}\,.$

a) Rappresentate graficamente gli insiemi $A\,, B$ e C sulla retta reale.

b) Individuate quali delle seguenti scritture sono corrette; per ciascuna di loro dite se esprime un'affermazione vera o falsa:

$-1 \in B\,;\quad \{-1\} \subseteq C\,;\quad A \cap C = C\,;\quad 4 \subset A\,;\quad]2, 5[\subset A\,;\quad C \subseteq \mathbf{R} \setminus B\,;\quad C \setminus A \neq \emptyset\,.$

Soluzione

1.3) a) Determinate e rappresentate graficamente sulla retta reale gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbf{R} : -x^2 \geq 3x\}\,,\quad B = \{x \in \mathbf{R} : \frac{1}{x^2} < 1\}\,,\quad C = \{x \in \mathbf{R} : (x^2 - 9)(x^2 + 2) = 0\}\,.$$

b) Determinate $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ e $\mathbf{R} \setminus B$. Gli insiemi A e B sono disgiunti?

c) Dite se A e B sono degli intervalli.

d) Dite se sono vere o false le seguenti affermazioni (motivando le risposte):

$[-1, 0] \in \mathcal{P}(A)\,;\quad \{-2, 2\} \subseteq B\,;\quad C = [-3, 3]\,;\quad A \cap C = \{-3\}\,;\quad B \subseteq \mathcal{P}(B)\,;\quad C \in \mathcal{P}(B)\,.$

e) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano gli insiemi $\{-1\} \times C\,; C \times A$ e $B \times A\,.$

Soluzione

1.4) Sia $A = \{x \in \mathbf{R} : x = \sqrt{2} - \frac{1}{k}, k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a) L'insieme A ha minimo.

b) Il numero $\sqrt{2} + 1$ è l'estremo superiore di A e non è il massimo di A.

c) $\inf A = \sqrt{2}$.

d) L'insieme A non è limitato.

Soluzione

1.5) a) Determinate gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbf{R} : \frac{4x + x^2}{x - 1} \geq x\}\,;\qquad B = \{x \in \mathbf{R} : \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2} > 0\}\,;\qquad C = \{x \in \mathbf{R} : |(x^2 - 4)(x^2 - 1)| \leq 0\}\,;$$

$$D = \{x \in \mathbf{R} : \frac{x^2 + 5x}{x - 1} \leq 1 - x\}\,;\qquad E = \{x \in \mathbf{R} : -x^2 + x \leq x\}\,;\qquad F = \{x \in \mathbf{R} : \frac{|x| - 1}{x^2 + 2x - 3} \geq 0\}\,.$$

b) Di ogni insieme determinato nel punto a)

i) dite se è limitato (inferiormente/superiormente);

ii) individuate l'insieme dei suoi maggioranti e l'insieme dei suoi minoranti;

iii) determinate il suo estremo superiore e il suo estremo inferiore e dite se sono massimo e minimo, rispettivamente.

Soluzione

1.6) Siano dati due insiemi non vuoti E ed F, con $F \subset E \subset \mathbf{R}$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni

a) se F è limitato inferiormente, lo è anche E;

b) se esiste $\min F$, allora esiste $\min E$;

c) se E è limitato superiormente, allora $\sup F$ è un numero reale;

d) $E \times F \subseteq E \times E$

stabilite se è vera o falsa. Nel caso sia falsa, fornite un controesempio.

Soluzione

1.7) a) Determinate
$A = \{x \in \mathbf{R} : x|x| + |x^2 - 1| \geq 2x\}$, $\quad B = \{x \in \mathbf{R} : \sqrt[3]{x^2 - 1} \leq 2\}$, $\quad C = \{x \in \mathbf{R} : \sqrt[4]{1 - |x|} < 1\}$
e rappresentateli sulla retta reale.

b) Dite se sono intervalli. Dite se A e B sono insiemi disgiunti.

c) Determinate gli insiemi $B \cup C$, $B \cap C$ e $B \setminus C$.

Soluzione