

2.1) Dite se i seguenti insiemi sono limitati inferiormente/superiormente. Determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore. Dite se sono massimo e/o minimo, rispettivamente.

i) $A = \{x_n = \frac{3n-2}{n}, n \in \mathbf{N}, n \geq 1\};$ ii) $A = \{x_n = n^2 - 2n - 3, n \in \mathbf{N}, n \geq 1\};$

iii) $A = \{x_n = (-1)^n \frac{3n-1}{n}, n \in \mathbf{N}, n \geq 1\};$ iv) $A = \{x \in \mathbf{R} : -6x^2 - |x| + 1 > 0\}.$

2.2) Sia $A = \{x_n = \frac{3n-1}{n^2} : n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}.$

i) Provate che $0 < x_n \leq 2$ per ogni $n \in \mathbf{N}, n \geq 1.$

ii) Provate che $\inf A = 0$ e $\sup A = 2.$

iii) Dite se sono minimo e massimo, rispettivamente.

2.3) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano le coppie $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ soddisfacenti

a) $y = x^2 + 1;$ $y = (x-1)^2;$ $y = -x^2;$ $y = (x+1)^2 - 1;$ $y = x^2 + 2x - 3.$

b) $y = x^3 - 1;$ $y = -x^3;$ $y = -(x+1)^3 + 1.$

c) $y = \sqrt[4]{x+1}$ per $x \geq -1;$ $y = -\sqrt{x} - 1$ per $x \geq 0.$

d) $y = \sqrt[3]{x} - 1;$ $y = -\sqrt[3]{x+1} - 1.$

e) $y = 2^x - 1;$ $y = -2^{x-1};$ $y = e^{|x|} + 1.$

f) $y = 1 - \log x$ per $x > 0;$ $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$ per $x > 0;$ $y = \log_2(x+1)$ per $x > -1.$

2.4) a) Calcolate i seguenti logaritmi: $\log_4 \frac{1}{16};$ $\log_2 \sqrt[4]{2};$ $\log_{\sqrt{5}} 125;$ $\log_{\frac{1}{4}} \frac{4}{64}.$

b) Risolvete le seguenti disequazioni:

i) $2 \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - \log_{\frac{1}{2}} x^2 > 0;$ ii) $\log_3(2x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log_{\frac{1}{3}} 2x < 0;$ iii) $\log(x - \sqrt{x}) < 1.$

iv) $2e^{2x} - 5e^x + 2 < 0;$ v) $2 \cdot 9^{-x} - 5 \cdot 3^{-x} + 2 < 0;$ vi) $3^{2x-1} < 3^{4x^2-x-1};$ vii) $\frac{1-2^{-x}}{9^x-3} \geq 0.$

2.5) Per ciascuna delle seguenti espressioni determinate l'insieme dei numeri reali per cui è definita:

a) $\sqrt{|x-1| + 2x};$ b) $\sqrt[3]{\log(x - \sqrt{x})};$ c) $\sqrt[4]{1 - \log x};$ d) $\log |e^x - \frac{1}{e}|.$

2.6) a) Scrivete in forma algebrica i seguenti numeri complessi:

i) $(2i+3)(1-i);$ ii) $\frac{i}{1+i};$ iii) $\frac{(1+2i)^2}{1-i}.$

b) Determinate il coniugato in forma algebrica e il modulo dei seguenti numeri complessi:

i) $3i(1+2i);$ ii) $\frac{1}{1-i} + \frac{3}{2i}.$

2.7) Determinate le soluzioni delle seguenti equazioni:

$\bar{z}(Imz + Rez) = z;$ $\frac{z}{1+i} + \bar{z} = i+1;$ $|z|\bar{z} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i.$