Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica e CdL in Ingegneria Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

a.a. 2019-20 - Esercizi Paradigma 3 - *"Qualche disequazione, Numeri complessi à gogo e un pizzico di Principio di Induzione"*

3.1) a) Determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme $A = \{x_n = \dfrac{(-1)^n + 2}{n} : n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}$.
Dite se sono massimo e minimo, rispettivamente (motivate le risposte!).

b) Determinate l'insieme A definito da $A = \{x \in \mathbf{R} : \dfrac{|x-3|}{|x+2|} \leq 1\}$.
Determinate $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ e $\min A$. Dite se A è un intervallo e se A è limitato.
Soluzione Soluzione

3.2) Risolvete le seguenti disequazioni :

a) $|1 - |x^2 - 1|| \leq 2$; $\quad e^{|x|} e^{1-x^2} > e$;

b) $(2 - |x|)e^{x^3-1} < 0$; $\quad (2 - |x|)\log(x^2 - 1) < 0$;

c) $t^2 - (\log_2 4)t + \log_3 \frac{1}{3} \geq 0$; $\quad e^{2x} - (\log_2 4)e^x + \log_3 \frac{1}{3} < 0$.
Soluzione

3.3) a) Determinate modulo, coniugato, reciproco dei seguenti numeri complessi:
$1 - 2i$; $\quad -3 + i$; $\quad \sqrt{3} + i$; $\quad -2 - \dfrac{1}{2}i$; $\quad 8i$; $\quad \dfrac{1}{1-i} - \dfrac{2i}{-i+1}$.

b) Scrivete in forma algebrica i seguenti numeri complessi:
$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2$; $\quad \dfrac{(8-i)+(6+i)}{2+2i}$; $\quad \dfrac{3i}{|2-i|^2}$; $\quad \dfrac{4+2i}{i}$.

c) Scrivete in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi:
$-i$; $\quad 2 - 2i$; $\quad 3 + \sqrt{3}i$; $\quad -\sqrt{3} + 3i$; $\quad 2i$; $\quad -4$.

Soluzione Soluzione Soluzione

3.4) a) Sia $z = 2i$. Determinate $\mathrm{Re}((z+1)(\overline{z}+3))$ e $\mathrm{Im}(|z|i + \overline{(z+1)})$.
b) Risolvete in $\mathbf{C}$ le seguenti equazioni:
i) $2z - 3\overline{z} = 3i + 1$; $\quad$ ii) $z^2 = 2\overline{z}$; $\quad$ iii) $z^2 = 2\overline{z}i$.
c) Risolvete in $\mathbf{C}$ le seguenti equazioni di secondo grado:
i) $4z^2 - 4z + 2 - \sqrt{3}i = 0$; $\quad$ ii) $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$.
Soluzione Soluzione Soluzione

3.5) Rappresentate nel piano di Gauss i seguenti insiemi:
i) $A = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 2,\ \mathrm{Im}z \geq 1\}$; $\quad$ ii) $B = \{z \in \mathbf{C} : 2\mathrm{Re}z - \mathrm{Im}z + 1 \geq 0,\ (\mathrm{Im}z)^2 \leq 1\}$;
iii) $C = \{z \in \mathbf{C} : |z+1| = \mathrm{Im}z\}$; $\quad$ iv) $D = \{z \in \mathbf{C} : |z+1|^2 = (\mathrm{Im}z)^2\}$.
Soluzione

3.6) a) Scrivete in forma algebrica la quarta e la decima potenza di $z = -2\sqrt{3} + 2i$.

b) Determinate e rappresentate nel piano di Gauss
i) le radici cubiche di $w = 2(i-1)$; $\quad$ ii) le radici quarte di z, quando $\overline{z} = 1 + i$.
Soluzione Soluzione

3.7) Trovate le soluzioni complesse (z, w) dei seguenti sistemi di equazioni

i) $\begin{cases} w^2 + i\overline{w} + z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(-1+i) \\ |z|^2 - z^2 = 0; \end{cases}$ $\quad$ ii) $\begin{cases} z + iw\overline{z} = -i \\ w - iz\overline{w} = i; \end{cases}$ $\quad$ iii) $\begin{cases} \overline{z}w = i \\ |w|^2 z + 1 = 0. \end{cases}$

Soluzione Soluzione Soluzione

3.8) Provate, usando il principio di induzione, che

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ per ogni $n \geq 0$.

ii) $n^2 \geq 2n+1$ per ogni $n \geq 3$.

iii) $2^n \geq n^2$ per ogni $n \geq 4$.

iv) $n! \geq 3^{n-2}$ per ogni $n \geq 0$.

(Ricordo che $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$, dove 0!=1 e 1!=1. Si ha $n! = n(n-1)!$ per ogni $n \geq 1$).

Soluzione Soluzione