

3.1) a) Determinate l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme $A = \{x_n = \frac{(-1)^n + 2}{n} : n \in \mathbf{N}, n \geq 1\}$.
 Dite se sono massimo e minimo, rispettivamente (motivate le risposte!).

b) Determinate l'insieme A definito da $A = \{x \in \mathbf{R} : \frac{|x-3|}{|x+2|} \leq 1\}$.

Determinate $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ e $\min A$. Dite se A è un intervallo e se A è limitato.

3.2) Risolvete le seguenti disequazioni :

a) $|1 - |x^2 - 1|| \leq 2$; $e^{|x|}e^{1-x^2} > e$;

b) $(2 - |x|)e^{x^3-1} < 0$; $(2 - |x|)\log(x^2 - 1) < 0$;

c) $t^2 - (\log_2 4)t + \log_3 \frac{1}{3} \geq 0$; $e^{2x} - (\log_2 4)e^x + \log_3 \frac{1}{3} < 0$.

3.3) a) Determinate modulo, coniugato, reciproco dei seguenti numeri complessi:

$1 - 2i$; $-3 + i$; $\sqrt{3} + i$; $-2 - \frac{1}{2}i$; $8i$; $\frac{1}{1-i} - \frac{2i}{-i+1}$.

b) Scrivete in forma algebrica i seguenti numeri complessi:

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$; $\frac{(8-i) + (6+i)}{2+2i}$; $\frac{3i}{|2-i|^2}$; $\frac{4+2i}{i}$.

c) Scrivete in forma trigonometrica ed esponenziale i seguenti numeri complessi:

$-i$; $2 - 2i$; $3 + \sqrt{3}i$; $-\sqrt{3} + 3i$; $2i$; -4 .

3.4) a) Sia $z = 2i$. Determinate $\operatorname{Re}((z+1)(\bar{z}+3))$ e $\operatorname{Im}(|z|i + \overline{(z+1)})$.

b) Risolvete in \mathbf{C} le seguenti equazioni:

i) $2z - 3\bar{z} = 3i + 1$; ii) $z^2 = 2\bar{z}$; iii) $z^2 = 2\bar{z}i$.

c) Risolvete in \mathbf{C} le seguenti equazioni di secondo grado:

i) $4z^2 - 4z + 2 - \sqrt{3}i = 0$; ii) $z^2 + 2iz - 1 - i = 0$.

3.5) Rappresentate nel piano di Gauss i seguenti insiemi:

i) $A = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 2, \operatorname{Im} z \geq 1\}$; ii) $B = \{z \in \mathbf{C} : 2\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z + 1 \geq 0, (\operatorname{Im} z)^2 \leq 1\}$;

iii) $C = \{z \in \mathbf{C} : |z+1| = \operatorname{Im} z\}$; iv) $D = \{z \in \mathbf{C} : |z+1|^2 = (\operatorname{Im} z)^2\}$.

3.6) a) Scrivete in forma algebrica la quarta e la decima potenza di $z = -2\sqrt{3} + 2i$.

b) Determinate e rappresentate nel piano di Gauss

i) le radici cubiche di $w = 2(i-1)$; ii) le radici quarte di z , quando $\bar{z} = 1 + i$.

3.7) Trovate le soluzioni complesse (z, w) dei seguenti sistemi di equazioni:

i) $\begin{cases} w^2 + i\bar{w} + z - \bar{z} = 2\operatorname{Im}(-1+i) \\ |z|^2 - z^2 = 0 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} z + iw\bar{z} = -i \\ w - iz\bar{w} = i \end{cases}$ iii) $\begin{cases} \bar{z}w = i \\ |w|^2 z + 1 = 0 \end{cases}$.

3.8) Provate, usando il principio di induzione, che

i) $\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ per ogni $n \geq 0$.

ii) $n^2 \geq 2n + 1$ per ogni $n \geq 3$.

iii) $2^n \geq n^2$ per ogni $n \geq 4$.

iv) $n! \geq 3^{n-2}$ per ogni $n \geq 0$.

(Ricordo che $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$, dove $0!=1$ e $1!=1$. Si ha $n! = n(n-1)!$ per ogni $n \geq 1$).