Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica e CdL in Ingegneria Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

a.a. 2019-20 - Esercizi Paradigma 4 - *"E iniziamo con le funzioni: immagine, grafico, proprietà globali, composizione,..."*

4.1) Provate, usando il principio di induzione, che

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \forall n \in \mathbf{N}\,, n \geq 0;$

ii) $3^n \geq n2^n \qquad \forall n \in \mathbf{N}\,, n \geq 0.$

4.2) Per ognuna delle seguenti funzioni dite se è iniettiva e se è dispari (motivando le risposte):

i) $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R} \qquad x \mapsto f(x) = x + \dfrac{1}{x}\,;$ ii) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad x \mapsto f(x) = 2 + \sin x\,;$

iii) $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R} \qquad x \mapsto f(x) = x - \dfrac{1}{x}\,;$ iv) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad x \mapsto f(x) = x^3 - 2\,.$

4.3) Siano date le funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e $g : ]-\infty, 0[\to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x > 0 \\ 3x + 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ -x - 1 & \text{se } -1 < x < 0\,. \end{cases}$$

i) Determinate l'immagine di $f$ e l'immagine di $g$.
ii) Dite se sono funzioni iniettive, e se sono funzioni suriettive.
iii) Determinate, dove esiste, la funzione composta $f \circ g$.

4.4) a) Sia $A = ]-3, 0[\cup[1, 2[$ e sia $f : A \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } -3 < x \leq -1 \\ x^2 - 1 & \text{se } -1 < x < 0 \\ -3x + 7 & \text{se } 1 \leq x < 2\,. \end{cases}$

i) Rappresentate graficamente $f$, e determinate $\inf\limits_A f$ e $\sup\limits_A f$. Dite se sono minimo e massimo.

ii) Disegnate, nei rispettivi domini, i grafici qualitativi delle funzioni $x \mapsto f(x) + 1$, $x \mapsto f(x + 1)$, $x \mapsto \dfrac{1}{4} f(x)$ e $x \mapsto -3f(x) + 2$.

b) Siano $f(x) = |\log |x||$ e $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0\,. \end{cases}$

Determinate il dominio naturale della funzione composta $g \circ f$ e scrivete la sua espressione. Determinate l'immagine di $g \circ f$ e dite se $g \circ f$ è iniettiva e se è pari.

4.5) Siano $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ e $g : ]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ le funzioni definite da $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ e $g(x) = \log_2 x\,.$

Determinate, dove esistono, le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$. Rappresentatele graficamente. Sono funzioni costanti? Ammettono massimo e minimo?

4.6) i) Provate che la successione di termine $a_n = \frac{n^2-1}{2n}$, $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ è strettamente crescente (ossia, per ogni $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ si ha $a_n < a_{n+1}$).
ii) Le successioni di termini $b_n = \log(a_n + 1)$ e $c_n = -\sqrt[3]{a_n}$ sono strettamente crescenti?

4.7) Date le funzioni $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \log x & \text{se } x > 0\,, \end{cases}$

determinate l'espressione delle funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

4.8) i) Sia $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione. Scrivete la definizione di

a) maggiorante di $f$ b) estremo superiore di $f$ c) massimo di $f$.

ii) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ -x^3 & \text{se } -1 < x < 1 \\ -2^{-x} & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Usando la rappresentazione grafica di $f$,
a) determinate l'insieme dei maggioranti di $f$ e l'insieme dei minoranti di $f$.
b) determinate $\inf\limits_{\mathbf{R}} f$ e $\sup\limits_{\mathbf{R}} f$. Essi sono massimo e minimo, rispettivamente?