Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica e CdL in Ingegneria Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

a.a. 2019-20 - Esercizi Paradigma 5 - *"E si continua... funzioni composte, inverse, proprietà locali,...e un po' di limiti"*

5.1) Risolvete le seguenti disequazioni trigonometriche:

a) $\sin(2x) > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $0 \le \cos(x+1) < 1$; c) $2\sin^2 x - \sin x > 1$.

5.2) i) Per ciascuna delle seguenti funzioni tracciate un grafico qualitativo

$$|2x^2+4x+1|; \quad -|x^2-2x-3|+1; \quad |2^{|x|}-2|; \quad 1-\sqrt[3]{x+1}; \quad ||\sqrt[3]{x}|-2|$$

nel suo dominio naturale. Individuate inoltre gli eventuali punti di massimo/minimo locali (relativi).

ii) Tracciate un grafico qualitativo di $f(x) = |\dfrac{\pi}{2} - \arccos x|$ e di $g(x) = \arccos|x|$ su $[-1,1]$. Determinate il minimo e il massimo (rispett. i punti di minimo e i punti di massimo) di f e di g.

iii) Siano $f(x) = e^{|x-\frac{\pi}{4}|}$ e $g(x) = \arctan(x+1)$. Determinate l'immagine della funzione composta $(f\circ g)(x)$ e dite se $f\circ g$ è iniettiva.

5.3) Date le funzioni $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$ e $g,h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \arcsin x; \quad g(x) = \begin{cases} \arctan|x| & \text{se } |x|\le 1 \\ -\arctan|x| + \frac{\pi}{4} & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} -|x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

determinate, dove esistono, l'espressione delle funzioni composte $h\circ g$ e $h\circ f$.

5.4) i) Data la funzione $f:[-1,+\infty[\to f([-1,+\infty[)$ definita da $f(x) = x^2+2x-1$, determinate l'espressione della funzione inversa $f^{-1}(x)$.

ii) Rappresentate graficamente nello stesso sistema di riferimento la funzione f e la funzione f^{-1}.

iii) Scrivete, dove esiste, l'espressione della funzione reciproca $\dfrac{1}{f(x)}$ di $f(x)$. Calcolate $\dfrac{1}{f(x)}$ e $f^{-1}(x)$ per $x\in\{0,2,7\}$.

5.5) Determinate il dominio naturale B della funzione $f(x) = \arccos(2+4x)$; dite se $f: B\to[0,\pi]$ è invertibile. Determinate eventualmente l'inversa.

5.6) Risolvete in $\mathbf{R}$ le seguenti equazioni:

i) $\sin(\arcsin(2x+1)) = x-3$; ii) $\arcsin(\sin x) = 2x-1$;

iii) $\sin(\arcsin(\dfrac{x^2}{2})) = x+\dfrac{3}{2}$; iv) $\arcsin(\cos(x^2-x)) = \dfrac{\pi}{2}$.

5.7) Sia $f(x) = \arcsin x + |\arcsin x|$ per $x\in[-1,1]$. Tracciate un grafico qualitativo di f.

i) Determinate, al variare di $k\in\mathbf{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

ii) f è strettamente monotona su $[-1,1]$?

5.8) i) Determinate il dominio naturale delle seguenti funzioni

a) $\sqrt{\log_{1/2}|x|-1}$; $\arccos(x^2-2)$; b) $\sqrt[3]{\arcsin x}-1$; $\arcsin(\sqrt[3]{x}-1)$.

ii) Studiate la monotonia delle funzioni date in i)b) (sfruttando la monotonia nota delle funzioni elementari).

5.9) Scrivete, in matematichese (usando $\forall\varepsilon>0,\ldots$ oppure $\forall M>0,\ldots$), la definizione di

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2; \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 1; \quad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.$$

5.10) Provate, usando la definizione di limite, che $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x+1} = 3$.

5.11) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

i) $\lim_{x\to 3}(x^2-3x+1)\,;\qquad \lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x^3}+2\sqrt[3]{x}\right);\qquad \lim_{x\to\pi}\left(\frac{x^2+\sin x}{\sqrt[4]{x}}\right);$

ii) $\lim_{x\to -2^-}\frac{1}{x^2-4}\,;\qquad \lim_{x\to -1^+}\frac{2^{-1}}{x^3+1}\,;\qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{\sin 1}{|x|-1}\,;\qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{\sin 1}{|x|-1}\,;$

iii) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2}{x^2}+\frac{3x}{x^2+1}\right);\qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-x-3}{1-x^4}\,;\qquad \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x}\right).$