Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica e CdL in Ingegneria Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

a.a. 2019-20 - Esercizi Paradigma 5 - *"E si continua... funzioni composte, inverse, proprietà locali,...e un po' di limiti"*

5.1) Risolvete le seguenti disequazioni trigonometriche:

a) $\sin(2x) > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $0 \le \cos(x+1) < 1$; c) $2\sin^2 x - \sin x > 1$.

Soluzione

5.2) i) Per ciascuna delle seguenti funzioni tracciate un grafico qualitativo

$$|2x^2 + 4x + 1|\,; \quad -|x^2 - 2x - 3| + 1\,; \quad |2^{|x|} - 2|\,; \quad 1 - \sqrt[3]{x+1}\,; \quad ||\sqrt[3]{x}| - 2|$$

nel suo dominio naturale. Individuate inoltre gli eventuali punti di massimo/minimo locali (relativi).

ii) Tracciate un grafico qualitativo di $f(x) = |\frac{\pi}{2} - \arccos x|$ e di $g(x) = \arccos|x|$ su $[-1, 1]$. Determinate il minimo e il massimo (rispett. i punti di minimo e i punti di massimo) di $f$ e di $g$.

iii) Siano $f(x) = e^{|x - \frac{\pi}{4}|}$ e $g(x) = \arctan(x+1)$. Determinate l'immagine della funzione composta $(f \circ g)(x)$ e dite se $f \circ g$ è iniettiva.

Soluzione Soluzione

5.3) Date le funzioni $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ e $g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \arcsin x\,; \quad g(x) = \begin{cases} \arctan|x| & \text{se } |x| \le 1 \\ -\arctan|x| + \frac{\pi}{4} & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} -|x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

determinate, dove esistono, l'espressione delle funzioni composte $h \circ g$ e $h \circ f$.

Soluzione

5.4) i) Data la funzione $f : [-1, +\infty[ \to f([-1, +\infty[)$ definita da $f(x) = x^2 + 2x - 1$, determinate l'espressione della funzione inversa $f^{-1}(x)$.

ii) Rappresentate graficamente nello stesso sistema di riferimento la funzione $f$ e la funzione $f^{-1}$.

iii) Scrivete, dove esiste, l'espressione della funzione reciproca $\dfrac{1}{f(x)}$ di $f(x)$. Calcolate $\dfrac{1}{f(x)}$ e $f^{-1}(x)$ per $x \in \{0, 2, 7\}$.

Soluzione

5.5) Determinate il dominio naturale $B$ della funzione $f(x) = \arccos(2 + 4x)$; dite se $f : B \to [0, \pi]$ è invertibile. Determinate eventualmente l'inversa.

Soluzione

5.6) Risolvete in $\mathbf{R}$ le seguenti equazioni:

i) $\sin(\arcsin(2x+1)) = x - 3$; ii) $\arcsin(\sin x) = 2x - 1$;

iii) $\sin(\arcsin(\dfrac{x^2}{2})) = x + \dfrac{3}{2}$; iv) $\arcsin(\cos(x^2 - x)) = \dfrac{\pi}{2}$.

Soluzione

5.7) Sia $f(x) = \arcsin x + |\arcsin x|$ per $x \in [-1, 1]$. Tracciate un grafico qualitativo di $f$.

i) Determinate, al variare di $k \in \mathbf{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

ii) $f$ è strettamente monotona su $[-1, 1]$?

Soluzione

5.8) i) Determinate il dominio naturale delle seguenti funzioni

a) $\sqrt{\log_{1/2}|x| - 1}$; $\arccos(x^2 - 2)$; b) $\sqrt[3]{\arcsin x} - 1$; $\arcsin(\sqrt[3]{x} - 1)$.

ii) Studiate la monotonia delle funzioni date in i)b) (sfruttando la monotonia nota delle funzioni elementari).

Soluzione

5.9) Scrivete, in matematichese (usando $\forall\varepsilon > 0, \dots$ oppure $\forall M > 0, \dots$), la definizione di

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2\,; \qquad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 1\,; \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty\,.$$

Soluzione

5.10) Provate, usando la definizione di limite, che $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x+1} = 3\,.$

Soluzione

5.11) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti:

i) $\displaystyle\lim_{x\to 3}(x^2 - 3x + 1)\,; \qquad \lim_{x\to -1}\Big(\frac{1}{x^3} + 2\sqrt[3]{x}\Big)\,; \qquad \lim_{x\to\pi}\Big(\frac{x^2+\sin x}{\sqrt[4]{x}}\Big)\,;$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x^2-4}\,; \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{2^{-1}}{x^3+1}\,; \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{\sin 1}{|x|-1}\,; \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin 1}{|x|-1}\,;$

iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{2}{x^2} + \frac{3x}{x^2+1}\Big)\,; \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x-3}{1-x^4}\,; \qquad \lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\Big)\,.$

Soluzione