Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica e CdL in Ingegneria Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

a.a. 2019-20 - Esercizi Paradigma 7 - *"ancora qualche limite... e il potere delle funzioni continue..."*

7.1) Calcolate i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{4n})^{2n}$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{n+4}{n-2})^{n}$; c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{n-4}{n-2})^{n}$; d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+n^2}$;

e) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{2}-1)^{n}$; f) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n\log n^2}$; g) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log(n^4+\cos n)}{\log(n^5+\arctan n)}$;

h) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log_2(n+2^n)-n}{\log_2(3n+2^n)-n}$; i) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\arcsin\frac{1}{n}}{\log(n+2)-\log n}$; j) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\arctan(\frac{2}{n-1})}{\sqrt{9+\frac{1}{n}}-3}$.

Soluzione

7.2) i) Determinate, al variare di $\alpha\in\mathbf{R}$, i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\arctan n^{\alpha})\log(n+e^{n})$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\alpha}\arcsin\dfrac{1}{n^2+1}$.

ii) Calcolate, al variare di $\alpha\in\mathbf{R}$, $\alpha\geq 0$, il limite $\lim\limits_{n\to+\infty}3n^3\log(1+\dfrac{1}{n^3+\alpha n^{\alpha}})$.

Soluzione Soluzione

7.3) Determinate $\alpha\in\mathbf{R}$ e $\beta>0$, tali che le funzioni $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ e $g:[-1,1]\to\mathbf{R}$ definite da

$$f(x)=\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{2}x)+xe^{\alpha x} & \text{se } x\leq 1\\ \arctan(\frac{1}{x-1}) & \text{se } x>1\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\dfrac{\log(1+x^{\beta})}{\sin 2x} & \text{se } x>0\\ \frac{1}{2}\cos x & \text{se } x\leq 0.\end{cases}$$

risultino continue in $x=1$ e in $x=0$, rispettivamente.

Soluzione

7.4) Determinate l'insieme di definizione di ciascuna delle seguenti funzioni ed individuate eventuali asintoti:

$$f(x)=\frac{-2x^2+\sin|x|}{|x+1|};\qquad f(x)=e^{-x}+\arctan\frac{1}{x}.$$

Soluzione

7.5) Quali delle seguenti equazioni ammettono almeno una soluzione reale? Quali hanno un'unica soluzione reale?

$e^{-x}-\arctan x=-1$; $1-x^4=4x^2$; $2x^4+|x|=1$; $x^{33}+x+1=0$.

Soluzione

7.6) Provate che l'equazione $2x^4=1-x^3$ ammette una ed una sola soluzione nell'intervallo $[0,1]$. Determinate un intervallo $[\widetilde{a},\widetilde{b}]\subset]0,1[$ con $x_0\in]\widetilde{a},\widetilde{b}[$ e $\widetilde{b}-\widetilde{a}\leq\dfrac{1}{4}$.

Soluzione

7.7) Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funzione continua tale che

$$(*)\qquad \frac{x^2}{2}\leq f(x)\leq 2x^2\qquad \forall x\in[0,1].$$

Quali delle seguenti affermazioni sono vere per qualsiasi funzione f soddisfacente (*)?

i) $\exists x_0\in[0,1]:\ f(x_0)=\dfrac{7}{4}$; ii) $\exists x_0\in[0,1]:\ f(x_0)=\dfrac{3}{2}$;

iii) $\exists x_0\in[0,1]:\ f(x_0)=1$; iv) $\exists x_0\in[0,1]:\ f(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

Soluzione

7.8) i) Dite per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta finito il seguente limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\log(1+x^\alpha)}{\sin\sqrt{x}}$.

ii) Determinate il valore $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{\log(1+x^\alpha)}{\sin\sqrt{x}} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 1]$.

Soluzione

7.9) Dite se il teorema di Weierstrass è applicabile a ciascuna delle seguenti funzioni negli intervalli indicati:

i) $f(x) = \log x \quad$ su $]0, +\infty[$;

ii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\arctan x)^2} & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0\,; \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\arctan x} & \text{se } x \in [-1, 0[\\ x^2 \sin \dfrac{1}{x} + 1 & \text{se } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$

Soluzione