

7.1) Calcolate i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{2n}; & \text{b)} \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+4}{n-2}\right)^n; & \text{c)} \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-4}{n-2}\right)^n; & \text{d)} \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n+n^2}; \\ \text{e)} \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{2} - 1)^n; & \text{f)} \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n \log n^2}; & \text{g)} \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n^4 + \cos n)}{\log(n^5 + \arctan n)}; \\ \text{h)} \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(n+2^n) - n}{\log_2(3n+2^n) - n}; & \text{i)} \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n}}{\log(n+2) - \log n}; & \text{j)} \quad & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan\left(\frac{2}{n-1}\right)}{\sqrt{9 + \frac{1}{n}} - 3}. \end{aligned}$$

7.2) i) Determinate, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, i seguenti limiti:

$$\text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\arctan n^\alpha) \log(n + e^n); \quad \text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \arcsin \frac{1}{n^2 + 1}.$$

ii) Calcolate, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \geq 0$, il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^3 \log\left(1 + \frac{1}{n^3 + \alpha n^\alpha}\right)$.

7.3) Determinate $\alpha \in \mathbf{R}$ e $\beta > 0$, tali che le funzioni $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ e $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + xe^{\alpha x} & \text{se } x \leq 1 \\ \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^\beta)}{\sin 2x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2} \cos x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

risultino continue in $x = 1$ e $x = 0$, rispettivamente.

7.4) Determinate l'insieme di definizione di ciascuna delle seguenti funzioni ed individuate eventuali asintoti:

$$f(x) = \frac{-2x^2 + \sin|x|}{|x+1|}; \quad f(x) = e^{-x} + \arctan \frac{1}{x}.$$

7.5) Quali delle seguenti equazioni ammettono almeno una soluzione reale? Quali hanno un'unica soluzione reale?

$$e^{-x} - \arctan x = -1; \quad 1 - x^4 = 4x^2; \quad 2x^4 + |x| = 1; \quad x^{33} + x + 1 = 0.$$

7.6) Provate che l'equazione $2x^4 = 1 - x^3$ ammette una ed una sola soluzione nell'intervallo $[0, 1]$. Determinate un intervallo $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset]0, 1[$ con $x_0 \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ e $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$.

7.7) Sia $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua tale che

$$(*) \quad \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq 2x^2 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Quali delle seguenti affermazioni sono vere per qualsiasi funzione f soddisfacente $(*)$?

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \exists x_0 \in [0, 1]: f(x_0) = \frac{7}{4}; & \text{ii)} \quad & \exists x_0 \in [0, 1]: f(x_0) = \frac{3}{2}; \\ \text{iii)} \quad & \exists x_0 \in [0, 1]: f(x_0) = 1; & \text{iv)} \quad & \exists x_0 \in [0, 1]: f(x_0) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

7.8) i) Dite per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ risulta finito il seguente limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+x^\alpha)}{\sin \sqrt{x}}$.

ii) Determinate il valore $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\log(1+x^\alpha)}{\sin \sqrt{x}} & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

verifica le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo $[-1, 1]$.

7.9) Dite se il teorema di Weierstrass è applicabile a ciascuna delle seguenti funzioni negli intervalli indicati:

i) $f(x) = \log x$ su $]0, +\infty[$;

ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\arctan x)^2} & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0; \end{cases}$

iii) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\arctan x} & \text{se } x \in [-1, 0[\\ x^2 \sin \frac{1}{x} + 1 & \text{se } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$