Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica e CdL in Ingegneria Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

a.a. 2019-20 - Esercizi Paradigma 8 - *"...maggior regolarità delle funzioni: derivabilità e teoremi fondamentali..."*

8.1) Calcolate, dove esiste, la derivata prima delle seguenti funzioni:

$$\frac{x+2}{\arctan(x^2+1)}\,; \qquad \sin\sqrt[3]{x^3+x^{-1}}\,; \qquad xe^{\sqrt{x}+x}\,; \qquad (1+\cos x)^x\,.$$

Soluzione

8.2) i) Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha \sin x & \text{se } x < 0 \\ \log(1+3x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

risulta derivabile in $x_0 = 0$?

ii) Determinate i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tali che la funzione $f :]-1, +\infty[\to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \log_3(x+1) & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ \alpha \sin x + \beta \cos x & \text{se } 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ x & \text{se } x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

risulti continua su tutto $]-1, +\infty[$. Verificate se per tali valori di α e β la funzione è anche derivabile.

iii) Determinate i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \sin x + \beta e^x & \text{se } x < 0 \\ \arcsin(\alpha x^2 + x) - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $x_0 = 0$.

Soluzione Soluzione Soluzione

8.3) Dite quali delle seguenti funzioni non sono derivabili in $x = 0$:

$$|x|\arctan x\,; \quad x|\cos x|\,; \quad |x|\cos x\,; \quad \arctan\sqrt[3]{x}\,; \quad x\arctan\sqrt[3]{x}\,.$$

Soluzione

8.4) i) Verificate che la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x^2 + \log x$ è biettiva. Determinate $f^{-1}(e^2+1)$ e $(f^{-1})'(e^2+1)$.

ii) Sia $f(x) = x^3 e^{3x-2}$ definita su $\mathbf{R}$. Determinate $(f^{-1})'(e)$.

iii) Sia $f(x) = x - e + \log x$ definita su $]0, +\infty[$. Determinate $(f^{-1})'(1)$.

iv) Sia $f(x) = x + \arctan x$ su $\mathbf{R}$. Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(1+\frac{\pi}{4}, 1)$.

Soluzione Soluzione

8.5) Dite se le seguenti affermazioni sono vere, fornendo eventualmente dei controesempi oppure citando teoremi visti a lezione.

a) Se la funzione f è derivabile, allora la funzione $|f|$ è derivabile.
b) Se la funzione f è derivabile, allora la funzione $|f|$ è continua.
c) Se la funzione f^2 è continua, allora la funzione f è continua.
d) Se la funzione $|f|$ è continua, allora la funzione f è continua.

Soluzione

8.6) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione derivabile tale che $f'(1) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Quali delle seguenti affermazioni risulta sempre vera?

a) La funzione ha tangente orizzontale al grafico di f nel punto $(1, f(1))$.
b) $x = 1$ deve essere un punto di massimo locale stretto per f.
c) $f(1) > 0$.

Soluzione

8.7) Siano $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ due funzioni derivabili tali che $f(0) = \frac{\pi}{2}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$ e $g(x) = \cos(f(x^2 - 1))$. Determinate $g'(1)$.
Soluzione

8.8) i) Verificate che $f(x) = \arctan(x^2 - 3x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[0, 3]$. Determinate i punti $c \in]0, 3[$ tali che $f'(c) = 0$.
ii) Eseguite quanto in i) per la funzione $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ con $[a, b] = [-2, 2]$.
Soluzione

8.9) i) Verificate che $f(x) = x|x|$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange su $[a, b] = [-1, 1]$. Determinate i punti $c \in]-1, 1[$ tali che $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.
ii) Eseguite quanto in i) per la funzione $f(x) = \sin x$ con $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$.
Soluzione