

8.1) Calcolate, dove esiste, la derivata prima delle seguenti funzioni:

$$\frac{x+2}{\arctan(x^2+1)}; \quad \sin \sqrt[3]{x^3+x^{-1}}; \quad xe^{\sqrt{x}+x}; \quad (1+\cos x)^x.$$

8.2) i) Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \alpha \sin x & \text{se } x < 0 \\ \log(1+3x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

risulta derivabile in $x_0 = 0$?

ii) Determinate i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tali che la funzione $f:] - 1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \log_3(x+1) & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ \alpha \sin x + \beta \cos x & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ x & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

risulti continua su tutto $] - 1, +\infty[$. Verificate se per tali valori di α e β la funzione è anche derivabile.

iii) Determinate i valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \sin x + \beta e^x & \text{se } x < 0 \\ \arcsin(\alpha x^2 + x) - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $x_0 = 0$.

8.3) Dite quali delle seguenti funzioni non sono derivabili in $x = 0$:

$$|x| \arctan x; \quad |x| \cos x; \quad |x| \cos x; \quad \arctan \sqrt[3]{x}; \quad x \arctan \sqrt[3]{x}.$$

8.4) i) Verificate che la funzione $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ definita da $f(x) = x^2 + \log x$ è biettiva. Determinate $f^{-1}(e^2 + 1)$ e $(f^{-1})'(e^2 + 1)$.

ii) Sia $f(x) = x^3 e^{3x-2}$ definita su \mathbf{R} . Determinate $(f^{-1})'(e)$.

iii) Sia $f(x) = x - e + \log x$ definita su $]0, +\infty[$. Determinate $(f^{-1})'(1)$.

iv) Sia $f(x) = x + \arctan x$ su \mathbf{R} . Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(1 + \frac{\pi}{4}, 1)$.

8.5) Dite se le seguenti affermazioni sono vere, fornendo eventualmente dei controesempi oppure citando teoremi visti a lezione.

a) Se la funzione f è derivabile, allora la funzione $|f|$ è derivabile.

b) Se la funzione f è derivabile, allora la funzione $|f|$ è continua.

c) Se la funzione f^2 è continua, allora la funzione f è continua.

d) Se la funzione $|f|$ è continua, allora la funzione f è continua.

8.6) Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione derivabile tale che $f'(1) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Quali delle seguenti affermazioni risulta sempre vera?

a) La funzione ha tangente orizzontale al grafico di f nel punto $(1, f(1))$.

b) $x = 1$ deve essere un punto di massimo locale stretto per f .

c) $f(1) > 0$.

8.7) Siano $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ due funzioni derivabili tali che $f(0) = \frac{\pi}{2}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$ e $g(x) = \cos(f(x^2 - 1))$. Determinate $g'(1)$.

8.8) i) Verificate che $f(x) = \arctan(x^2 - 3x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle su $[0, 3]$. Determinate i punti $c \in]0, 3[$ tali che $f'(c) = 0$.

ii) Eseguite quanto in i) per la funzione $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$ con $[a, b] = [-2, 2]$.

8.9) i) Verificate che $f(x) = x|x|$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange su $[a, b] = [-1, 1]$. Determinate i punti $c \in]-1, 1[$ tali che $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

ii) Eseguite quanto in i) per la funzione $f(x) = \sin x$ con $[a, b] = [0, \frac{\pi}{2}]$.