

9.1) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti (usando, se possibile, il teorema di de l'Hôpital, e non solo ...):

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos x}{x^3}; & \text{b)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\log x}; & \text{c)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\log(\sin x)}; & \text{d)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right); \\ \text{e)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin x) \log x; & \text{f)} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{\tan(\pi x)}; & \text{g)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\arctan x - \frac{\pi}{2}); \\ \text{h)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - \cos x}{2x}; & \text{i)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cos \frac{1}{\sqrt{x}} - x^2 \sin \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Soluzione Soluzione

9.2) Studiate le seguenti funzioni individuando il dominio (se non indicato), il segno (quando possibile), il comportamento agli estremi del dominio (asintoti), la derivata prima e il suo segno (monotonia), la derivata seconda e il suo segno (quando possibile) (concavità/concavità), e tracciate un grafico qualitativo:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & f(x) = \begin{cases} x\sqrt{|x-4|} - 2 & \text{se } x < 0 \\ \arctan(-x^2) & \text{se } x \geq 0; \end{cases} & \text{ii)} \quad & f(x) = \frac{e^{|x|}}{e^x - e}; \\ \text{iii)} \quad & f(x) = \sqrt{|x|} \log x^2; & \text{iv)} \quad & f(x) = \frac{\sqrt{|x^2 - 4|}}{x}; & \text{v)} \quad & f(x) = \arctan \frac{1}{x} + |x + 1|. \end{aligned}$$

Soluzione

9.3) Studiate (dominio, simmetrie, limiti, segno, continuità, derivabilità, punti critici e loro natura, concavità/concavità se possibile) le seguenti funzioni (che avremmo voluto fare a lezione o abbiamo fatto parzialmente) e tracciate di ciascuna un grafico qualitativo:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & f(x) = |x| - \sqrt{|x|}; & \text{ii)} \quad & f(x) = \sqrt{x + \frac{8}{x} + \left| 1 - \frac{8}{x} \right|}; & \text{iii)} \quad & f(x) = \frac{\log x}{1 + \log x}; \\ \text{iv)} \quad & f(x) = \frac{1 + 3x^4}{x^2}; & \text{v)} \quad & f(x) = \frac{x - 4 + |x + 4|}{2} e^x; & \text{vi)} \quad & f(x) = \frac{e^x}{1 - x^2}; \\ \text{vii)} \quad & f(x) = \log \left(\frac{x^2 - 2|x| + 1}{x + 1} \right). \end{aligned}$$

Soluzione

9.4) Calcolate, se esistono, i seguenti limiti (usando, se possibile, gli sviluppi di Taylor):

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log^2(1 + \sin x)}{x \tan x}; & \text{b)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1 + x)}{1 - \cos x}; & \text{c)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}; \\ \text{d)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x}}; & \text{e)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \tan x} - \frac{1}{x^2} \right); & \text{f)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^5}{(\sin x - x \cos(x/\sqrt{3}))^2}; \\ \text{g)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x} \right); & \text{h)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sin x^2 - \sin^2 x)}{\sin x^2 - \tan x^2}; \\ \text{i)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin^2 \sqrt{x} - \sin^2 x}{x^2}; & \text{j)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(1-x)^{-1} + e^x]^2 - 4e^{2x} - 2x^2}{x^3}; \\ \text{k)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x + 3(x - \sin^2 \sqrt{x})}{x^2}; & \text{l)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{1 + x^2 - e^{x^2} + \sin^3 x}; \\ \text{m)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^3 - \log^2(1 - x)}{1 - \cos^2 x}; & \text{n)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - \log(1 + x \arctan x)}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1}. \end{aligned}$$

Soluzione