Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

Prove scritte

di

Analisi Matematica 1

A.A. 2019–2020

Prof. Anneliese Defranceschi

Dott. Gabriele Dalla Torre

Se le persone credono che la matematica non sia semplice,
è soltanto perché non si rendono conto di quanto la vita sia complicata.

John von Neumann

Dedicato a tutti gli studenti di
Analisi Matematica 1
del CdL in Informatica & Co.

che con il loro grande entusiasmo e impegno, ma soprattutto con i loro dubbi ed errori, hanno contribuito a far nascere questo lavoro. Un linguaggio tecnico da imparare a padroneggiare, qualche lacuna pregressa da colmare, nuove abilità complesse da acquisire: sono alcune delle difficoltà che gli studenti incontrano nello studio della matematica all'università. Sono emerse nel continuo confronto con loro, durante e al termine delle lezioni, nelle ore di ricevimento, durante l'attività di tutorato, gli esami e nelle chiacchierate a corso concluso. Abbiamo perciò sentito il bisogno di mettere a disposizione degli studenti del materiale di supporto all'apprendimento della matematica. Il nostro primo passo in questo senso è stato risolvere in modo preciso e dettagliato le prove scritte di Analisi Matematica 1 assegnate durante l'a.a. 2019/20 per il CdL in Informatica & Co.. Ci siamo posti l'obiettivo di elaborare un documento utile non solo per i futuri studenti di questo corso di laurea, ma anche di altri corsi di laurea scientifici.

Gli esercizi che contiene, di diversi tipi e livelli di difficoltà, possono essere proposti, eventualmente adattati e riorganizzati, come materiale di lavoro per gli studenti durante un corso di Analisi Matematica 1 e per la preparazione all'esame. Abbiamo posto particolare attenzione alla scrittura delle soluzioni e alla realizzazione di immagini, pensando anche a un uso autonomo da parte degli studenti. Questo documento contiene inoltre i link ai principali risultati e teoremi usati nello svolgimento degli esercizi e si riferiscono al corso di Analisi Matematica 1 dell'a.a. 2019/20 per il CdL in Informatica & Co. (http://latemar.science.unitn.it/defranceschi).

Questo lavoro è stato sviluppato nell'ambito dell'azione di Tutorato, di cui è referente il professor Marco Tubino, del progetto Ingegneria.POT. Una prima versione in LaTeX è stata realizzata grazie alla collaborazione del dottor Sascha Weitkamp.

Last but not least, un caloroso grazie va al professor Gabriele Anzellotti per averci sempre spinti verso la creazione di materiale didattico di supporto all'apprendimento della matematica, per la sua continua disponibilità e curiosità a confrontarsi e discutere con noi di come rendere la matematica more friendly and touchable anche agli studenti di corsi di laurea scientifici in cui la matematica non è centrale, per ogni suo aiuto nella ricerca di sponsor.

Povo, 2 luglio 2020.

Indice

Descrizione delle prove scritte

Ogni prova scritta è composta da due parti.

La prima parte consiste di 10 esercizi che vertono su tutti gli argomenti del corso. Sono esercizi di base che richiedono la conoscenza delle nozioni, dei risultati e degli strumenti fondamentali dell'Analisi Matematica. Il loro svolgimento non richiede 'più di una riga'; uno studente preparato dovrebbe essere in grado di risolverli senza particolari difficoltà. La prima parte si considerava superata se lo studente rispondeva correttamente a più di metà di quanto richiesto. Il superamento della prima parte è stata condizione necessaria perché la seconda parte del compito venisse valutata.

La seconda parte consiste di 6 esercizi. I primi 5 sono esercizi classici sugli argomenti principali del corso, l'ultimo richiede di completare una definizione e di enunciare e dimostrare un teorema scelto da una lista nota agli studenti, che riportiamo sotto. Ciascun esercizio dei primi 5 è più strutturato di quelli della prima parte e verte principalmente su un singolo argomento del corso come, per esempio, i numeri complessi, il principio di induzione, le funzioni e loro proprietà locali e globali, il calcolo differenziale con uno studio di funzione, il calcolo integrale, le serie e le equazioni differenziali.

Lista dei teoremi

Irrazionalità di $\sqrt{2}$

Formula del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica

Monotonia delle funzioni composte

Esistenza del limite destro (sinistro) di funzioni monotone

Esistenza degli zeri. Metodo di bisezione

Teorema dei valori intermedi

Formula della derivata del prodotto

Teorema di Fermat

Teorema del valor medio o di Lagrange

Teorema di Rolle

Teorema di de l'Hôpital (caso 0/0)

Condizione necessaria per la convergenza di una serie (la successione dei termini di una serie convergente è infinitesima)

Criteri di convergenza per serie: confronto, confronto asintotico, radice n-esima

Teorema della media integrale

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema di Torricelli–Barrow

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

A.A. 2019–2020 — Trento, 9 novembre 2019

Prima parte

a1) Sia $A =]-2,-1] \cup \{3\}$. Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme $A \times \mathbb{R}$.

a2) Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x^2 \leq 1 \ , \ y \leq \ |x|\}$.

a3) Sia $\overline{z} = \dfrac{1}{1-2i}$. Scrivete la forma algebrica di z.

a4) Rappresentate nel piano di Gauss l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 2, \operatorname{Re} z \geq 1\}$.

a5) Sia $A = \{x_n = 3 - \dfrac{2}{n} \ ; \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 1\}$. Determinate $\inf A$ e $\sup A$.

a6) Determinate il dominio naturale della seguente funzione $f(x) = \arcsin(x^2 - 3)$.

a7) Sia $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Determinate l'immagine di f.

a8) Dite se la funzione $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (\log x)^3$ è iniettiva (motivate la risposta; 'sì' o 'no' non sono una risposta motivata!).

a9) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x < 0 \\ -3 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Determinate la funzione composta $(f \circ f)(x)$.

a10) Calcolate $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sin x}}{3x}$.

b1) i) Sia $w = 1 - \sqrt{3}i$. Determinate le radici cubiche in $\mathbb{C}$ di w e rappresentatele nel piano di Gauss.

ii) Data w in i), rappresentate graficamente nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq |z - 2|\}.$$

iii) Risolvete in $\mathbb{C}$ l'equazione $2z^2 - |z|^2 = \overline{z}$.

b2) Usando il principio di induzione verificate che

$$\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = 2^n(n-1) + 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

b3) Sia $f : [-10, e] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+2} & \text{se } -10 \leq x \leq -1 \\ -\frac{2}{\pi} \arcsin x & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ a + \log x & \text{se } 1 < x \leq e. \end{cases}$

i) Determinate $a \in \mathbb{R}$ tale che f risulti continua su $[-10, e]$.

ii) Per tale valore di a, usando la rappresentazione grafica di f,

a) determinate $\inf\limits_{[-10,e]} f$ e $\sup\limits_{[-10,e]} f$. Essi sono minimo e massimo, rispettivamente?

b) determinate i punti di minimo locale e i punti di massimo locale di f.

c) rappresentate graficamente la funzione $x \mapsto -2f(x-2)$.

iii) Dite (motivando le risposte) quale delle seguenti scritture è corretta:

$$f(x) = o(1) \text{ per } x \to 0; \qquad f(x) = o(x) \text{ per } x \to 0.$$

b4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (x+1)^3 - 2$.

i) Determinate l'espressione della funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e rappresentatela graficamente.

ii) Quanto vale $f^{-1}(-2)$?

b5) Determinate al variare di $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, il limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin x^2}{[\log(1+x)]^k}$.

b6) i) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. L'insieme A si dice *limitato superiormente* se ...

ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Scrivete in matematichese il significato della scrittura

$$\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty.$$

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

Prova scritta di Analisi Matematica 1
A.A. 2019–2020 — Trento, 20 dicembre 2019

Prima parte

a1) Calcolate la derivata prima della funzione $f(x) = (\arctan(5x^2 + 1))^2$.

a2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = 2x + e^x$. Calcolate $(f^{-1})'(1)$.

a3) Dite per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin(2x)}{x} & \text{se } -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ e^x + \alpha & \text{se } 0 \le x \le 1 \end{cases}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass (motivate la risposta).

a4) Determinate i punti critici della funzione $f(x) = x^3 - x$ definita su $\mathbb{R}$.

a5) Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{2x^3}$.

a6) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato in $x_0 = 1$, della funzione $f(x) = e^x$.

a7) Determinate il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n}$.

a8) Determinate l'integrale $\displaystyle\int x \sin(x^2)\, dx$.

a9) Determinate gli $\alpha \ge 0$ tali che l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{x^{\alpha+1}}\, dx$ risulti convergente.

a10) Trovate l'insieme delle soluzioni dell'equazione $y'(x) = -\frac{1}{2} y(x)$.

b1) i) Determinate i valori di α e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \sin(\alpha x^2 - x) & \text{se } x < 0 \\ \alpha \log(1+x) + \beta e^{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile in $x_0 = 0$.

ii) Per tali valori di α e β

a) determinate $f'(0)$;

b) scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$;

c) Calcolate $\displaystyle\int_0^1 \left(f(x) + e^{2x}\right)\, dx$.

b2) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, non-derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione

$$f(x) = (x + |x+1|)e^{-x^2}.$$

Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.

ii) Determinate, usando la definizione, l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} x f(x)\, dx$.

b3) Determinate i limiti

i) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1 + \sin x^2 - \log^2(1 + \sqrt{2}x)}{x^3}$

ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1 + \sin t^2 - \log^2(1 + \sqrt{2}t))\, dt}{x^4}$.

b4) i) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)\frac{1}{n}$.

ii) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$, l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n^\alpha}$.

b5) Verificate che l'equazione $4^x = -x^2 + 2$ ammette una ed una sola soluzione nell'intervallo $[0,1]$. Determinate un intervallo $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [0,1]$ che contiene tale soluzione e che sia di ampiezza $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$.

b6) i) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *derivabile in* $x_0 \in \mathbb{R}$, se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del criterio del confronto asintotico per serie a termini positivi.

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

A.A. 2019–2020 — Trento, 9 gennaio 2020

Prima parte

a1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : -x - \frac{1}{2x} > 0\}$. Dite se A è

i) limitato solo inferiormente;

ii) limitato solo superiormente;

iii) limitato.

a2) Sia $A = \{x_n = (-1)^n \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N},\, n \geq 1\}$. Determinate $\min A$ e $\max A$.

a3) Sia $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Determinate z^4.

a4) Determinate il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\log(x-1)}$.

a5) Sia $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{se } x < 0 \\ x^2+1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$ Rappresentate graficamente la funzione inversa f^{-1}.

a6) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Determinate la funzione composta $(g \circ f)(x)$.

a7) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $f(x) = e^{2x} - \sin x$.

a8) Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{2t^2}\, dt$. Determinate la sua monotonia.

a9) Determinate gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(1-x^2)n}$ risulta convergente.

a10) Determinate $\displaystyle\int_{-1}^{4} |x-1|\, dx$.

b1) i) Determinate in forma algebrica le soluzioni dell'equazione $z^2 = -2i$ e rappresentatele nel piano di Gauss.

ii) Determinate le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del sistema $\begin{cases} (z^2 + 2i)(z - 1) = 0 \\ w\overline{z} - i = 0 \end{cases}$ esprimendole in forma algebrica.

iii) Verificate che le soluzioni (z, w) ottenute al punto (ii) soddisfino $|zw| = 1$. Questo fatto si può dedurre facilmente dal sistema di cui sono soluzioni?

b2) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, non-derivabilià, punti critici e loro natura) della funzione $f(x) = x - |x| + \dfrac{1}{2(x+1)}$. Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.

ii) Determinate l'area della regione del piano E compresa tra il grafico della funzione $f(x)$ con $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$ e l'asse delle ascisse.

iii) Tracciate un grafico qualitativo della funzione $g(x) = \arctan(f(x))$.

b3) i) Calcolate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (4n^3 + \log n) \sin\left(\frac{1}{2n^3 + \alpha n^\alpha}\right)$.

ii) Studiate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (4n^3 + \log n) \sin\left(\frac{1}{2n^3 + \alpha n^\alpha}\right)$.

b4) Studiate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x^\alpha}{x^2 \log(1 + \sqrt[4]{x})}\, dx$.

b5) Determinate la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -\dfrac{1}{x} y + \sin x \\ y(\pi) = 2. \end{cases}$

b6) i) La funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *primitiva* di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Rolle.

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

Prova scritta di Analisi Matematica 1
A.A. 2019–2020 — Trento, 30 gennaio 2020

Prima parte

a1) Siano $A = [-2, 3[$ e $B =]-\infty, 1[$. Determinate $\inf(A \setminus B)$.

a2) Rappresentate graficamente nel piano complesso l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} < 1\}$.

a3) Sia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \in [0, 1[\\ -x + \frac{3}{2} & \text{se } x \in [1, 2]. \end{cases}$
Determinate l'immagine di f.

a4) Determinate tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$ risulta finito.

a5) Determinate le equazioni degli asintoti della funzione $f(x) = \dfrac{2}{x+3} + 1$.

a6) Sia $f(x) = 2e^x + \arctan x$. Determinate l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1} nel punto $(2, 0)$.

a7) Calcolate $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x - \int_0^x \cos t \, dt}{x^3}$.

a8) Determinate $\displaystyle\int \left(\frac{\log x}{x} - 2x \right) dx$.

a9) Determinate gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n}$ risulta convergente.

a10) Determinate i valori degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{x^\alpha} \, dx$ risulta finito.

Seconda parte

b1) i) Risolvete in $\mathbb{C}$ l'equazione $|w|^2 - w + \overline{w} = 4 - 2i$.

ii) Scrivete le soluzioni in forma trigonometrica e in forma esponenziale, e rappresentatele nel piano di Gauss.

iii) Verificate che sono soluzioni dell'equazione $z^3 = 8i$. Sono le sole soluzioni di quest'equazione?

b2) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, non-derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione $f(x) = \arctan(x(1 - |x|))$. Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.

ii) Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

iii) Verificate se la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle sull'intervallo $[-1, 1]$.

iv) Calcolate $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

b3) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, e sia $f : [-\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cos x - \log(1 + x)}{x^2} & \text{se } x \in [-\frac{1}{2}, 1] \setminus \{0\} \\ \alpha & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinate α tale che $f(x)$ risulti continua su $[-\frac{1}{2}, 1]$.

ii) Per tale valore di α

a) verificate, usando la definizione, che f è derivabile in $x = 0$.

b) stabilite se $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ è un numero reale.

b4) i) Discutete la convergenza del seguente integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2 + 4x + 3}\, dx$.

ii) Usando la definizione calcolate il suo valore.

b5) i) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = 6e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

ii) Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' - y = 6e^{\alpha x}$.

b6) i) Si scrive che $f(x) = 1 + o(x^3)$ per $x \to 0$ se ...

ii) Scrivete la formula e la dimostrazione del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica.

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

Prova scritta di Analisi Matematica 1
A.A. 2019–2020 — Trento, 25 giugno 2020

Prima parte

a1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| \leq 0\}$. Rappresentate graficamente A e dite se A è un intervallo.

a2) Rappresentate graficamente nel piano complesso gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Im} z \geq 1$ e $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$.

a3) Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme $E \times F$, dove $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x\}$ e $F = [-1, 1]$.

a4) Risolvete la disequazione $\arcsin(2x - 1) \geq 0$.

a5) Calcolate $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n^3}{\log(n^2 + 1)}$.

a6) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $f(x) = x^3 - \alpha x$ abbia un punto critico in $x = 1$.

a7) Rappresentate graficamente la funzione $f(x) = |x| \sin x$ in un intorno di $x = 0$.

a8) Calcolate l'area della regione limitata E del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = -x^2 + 2x$ e l'asse delle ascisse.

a9) Dite se il seguente integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x}\, dx$ risulta convergente o no.

a10) Calcolate la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n}$.

Seconda parte

b1) Al variare di $a \in \mathbb{R}$ risolvete in $\mathbb{C}$ l'equazione $z\overline{z} - z + ia = 0$.

b2)
   i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità/non-derivabilità, punti critici e loro natura, convessità/concavità) della funzione $f(x) = \sqrt{|x|} - x$. Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.

   ii) Tracciato un grafico qualitativo della funzione $g(x) = \log(f(x))$ e un grafico qualitativo della funzione $h(x) = e^{f(x)}$.

b3) Determinate i valori reali di α per i quali

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \arctan \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n} - \frac{\alpha}{6n^2}}{(\sin \frac{1}{\sqrt{n}})^4}$$

esiste finito e diverso da zero.

b4)
   i) Discutete la convergenza del seguente integrale improprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-3}}\, dx$.

   ii) Usando la definizione calcolate il suo valore.

b5) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2y = xe^{3x} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

b6)
   i) Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. f si dice *iniettiva su* $[0,1]$ se ...

   ii) Scrivete la formula e la dimostrazione della derivata del prodotto di due funzioni derivabili.

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

Prova scritta di Analisi Matematica 1
A.A. 2019–2020 — Trento, 23 luglio 2020

Prima parte

a1) Sia $A =]-1, 0[\cup \{2\}$. Determinate l'insieme dei maggioranti e l'insieme dei minoranti di A.

a2) Sia $z = 1 + 2i$. Determinate $\text{Re}(zi)$.

a3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

i) Se f è strettamente crescente, allora f è iniettiva.
ii) Se f è strettamente crescente, allora f è continua.
iii) Se f è iniettiva, allora f è continua.

a4) Determinate il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{2^x - 1}$.

a5) Calcolate $f'(0)$, se $f(x) = x \log(e^x + 3)$.

a6) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = |x| - 1$ e $g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Determinate l'espressione della funzione composta $(g \circ f)(x)$.

a7) Calcolate $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{-n}$.

a8) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \sin 2x$ nel punto $(\pi, 0)$.

a9) Determinate $\displaystyle\int \frac{4x}{1 + x^2}\, dx$.

a10) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = x^2 + 2$.

Seconda parte

b1) Risolvete in $\mathbb{C}$ il sistema di equazioni

$$\begin{cases} z^2 + \overline{z}^2 = 2 \\ \operatorname{Im}[(1-i)z - \overline{z}] = 1. \end{cases}$$

b2) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)^\alpha}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}}$.

b3)
i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità/punti di non-derivabilità, punti critici e loro natura) la funzione $f(x) = (x^2 - |x|)e^x$ e tracciatene un grafico qualitativo.

ii) Calcolate $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\, dx$.

iii) Rappresentate graficamente la funzione $x \mapsto f(|x|)$ e la funzione $x \mapsto |f(|x|)|$.

b4) Determinate l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x^2-3)^n}{n}$.

b5)
i) Tracciate un grafico qualitativo della funzione $f(x) = \dfrac{3-x}{x^2}$ su $]0,+\infty[$.

ii) Sia $A = \{x_n = f(n) : n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Determinate l'estremo inferiore e l'estremo superiore di A. Dite se sono minimo e/o massimo, rispettivamente.

b6)
i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Scrivete la definizione di $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

ii) Enunciate e provate il teorema di esistenza degli zeri.

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

Prova scritta di Analisi Matematica 1
A.A. 2019–2020 — Trento, 10 settembre 2020

Prima parte

a1) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}$.

a2) Individuate la monotonia delle successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ e $b_n = \sin a_n$.

a3) Sia $z = -2+i$. Rappresentate nel piano di Gauss il numero complesso $\overline{z} + 3i$.

a4) Stabilite, motivando la risposta, se la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 - \sin(x-1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

è continua in $x = 1$.

a5) Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale, per $x \to 0^+$, della funzione

$$f(x) = \sin x + \cos\sqrt{2x} - 1.$$

a6) Siano date le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ -2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Determinate la funzione composta $f \circ g$.

a7) Calcolate $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + e^n}{n - e^{2n}}$.

a8) Calcolate $F'(0)$, dove $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \sqrt{4+t^2}\, dt$.

a9) Determinate $\displaystyle\int \frac{4}{x^2+1}\, dx$.

a10) Discutete la convergenza del seguente integrale improprio $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}\, dx$.

b1) Sia $f : [-1, e] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x\,|x| & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 2\log x + 1 & \text{se } x \in \,]1, e]\,. \end{cases}$$

i) Verificate che f è continua su $[-1, e]$ e derivabile su $]-1, e[$.

ii) Rappresentate graficamente f.

iii) Per il teorema di Lagrange esiste $c \in \,]0, e[$ tale che $f'(c)$ è la pendenza della retta passante per i punti $\big(0, f(0)\big)$ e $\big(e, f(e)\big)$. Determinate tutti i punti $c \in \,]0, e[$ con questa proprietà.

b2) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità/non-derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$. Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.

ii) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 0$ e $x = 1$.

b3) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt[3]{n}}\right)^n$.

b4) Determinate l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{3n\log n}$.

b5) i) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2(e^x + 2x) \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

ii) Determinate l'equazione degli asintoti che presenta la soluzione.

b6) i) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è *strettamente crescente su* $\mathbb{R}$ se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Torricelli-Barrow.

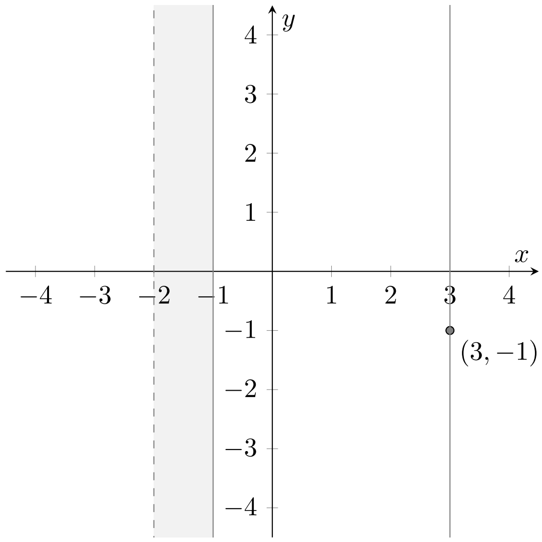
Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

Prova scritta di Analisi Matematica 1
A.A. 2019–2020 — Trento, 9 novembre 2019

Svolgimento prima parte

a1) Sia $A =]-2,-1] \cup \{3\}$. Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme $A \times \mathbb{R}$.

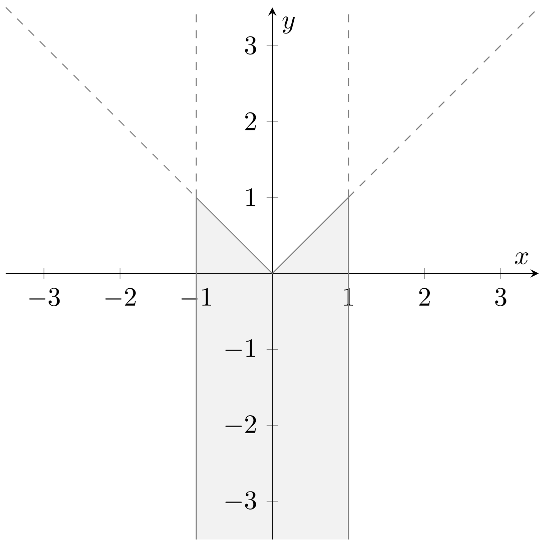
Soluzione.



Per definizione di prodotto cartesiano l'insieme $A \times \mathbb{R}$ contiene tutte le coppie (x, y) tali che $x \in A$ e $y \in \mathbb{R}$. Ad esempio le coppie $(3, 0)$, $(3, -2)$, $(3, 10000)$,..., cioè le coppie che hanno la prima coordinata uguale a 3, sono elementi di $A \times \mathbb{R}$ e quindi l'intera retta verticale di equazione $x = 3$ nel piano cartesiano è contenuta in $A \times \mathbb{R}$. Con lo stesso ragionamento anche le rette verticali di equazione $x = x_0$, dove x_0 appartiene all'intervallo $]-2,-1]$, sono contenute nell'insieme $A \times \mathbb{R}$. Risulta quindi che $A \times \mathbb{R}$ è l'unione della striscia verticale sull'intervallo $]-2,-1]$ e della retta di equazione $x = 3$. Nota che la retta verticale di equazione $x = -2$ non è contenuta nell'insieme, visto che -2 è un estremo non appartenente all'intervallo.

a2) Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :\ x^2 \leq 1\ ,\ y \leq\ |x|\}$.

Soluzione.



La soluzione della disequazione $x^2 \leq 1$ è l'intervallo $[-1, 1]$, cioè l'insieme dei numeri reali x che soddisfano $-1 \leq x \leq 1$. Abbiamo quindi $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1, y \leq |x|\}$. Notiamo che A è uguale all'intersezione $B \cap C$, dove $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ e $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y \leq |x|\}$.

L'insieme B è la striscia di piano compresa tra le rette verticali di equazioni $x = -1$ e $x = 1$, rette incluse, mentre C è la parte di piano costituita dai punti del grafico della funzione $f(x) = |x|$ e dai punti che si trovano sotto il grafico.

a3) Sia $\overline{z} = \dfrac{1}{1 - 2i}$. Scrivete la forma algebrica di z.

Soluzione.

La scrittura in forma algebrica di un numero complesso è una scrittura della forma $a + ib$ con a e b numeri reali; inoltre il coniugato di $a + ib$ è $a - ib$. Perciò per ogni numero complesso il coniugato del suo coniugato è il numero stesso, cioè per ogni $w \in \mathbb{C}$ abbiamo $\overline{\overline{w}} = w$.

Per ottenere la forma algebrica di $\overline{z} = \frac{1}{1-2i}$ moltiplichiamo numeratore e denominatore per il coniugato $1 + 2i$ di $1 - 2i$; in questo modo il denominatore diventa un numero reale:

$$\overline{z} = \frac{1}{1 - 2i} = \frac{1}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{1 + 2i}{5} = \frac{1}{5} + i\frac{2}{5}.$$

Coniugando entrambi i membri dell'uguaglianza $\overline{z} = \frac{1}{5} + i\frac{2}{5}$ otteniamo

$$z = \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}.$$

a4) Rappresentate nel piano di Gauss l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 2, \operatorname{Re} z \geq 1\}$.

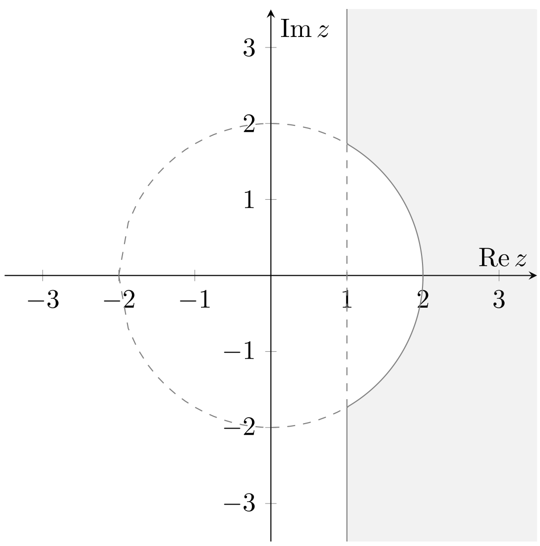
Soluzione.

L'insieme A è l'intersezione di due sottoinsiemi in $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 2\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1\}.$$

Le soluzioni della disequazione $|z| \geq 2$ sono tutti e soli i numeri complessi che hanno distanza da 0 maggiore o uguale a 2, cioè i numeri complessi che sono rappresentati nel piano di Gauss da punti esterni al disco di raggio 2 centrato nel origine o da punti del suo bordo.

Le soluzioni della disequazione $\operatorname{Re} z \geq 1$ sono tutti e soli i numeri complessi con parte reale maggiore o uguale a 1, cioè i numeri complessi che sono rappresentati nel piano di Gauss da punti appartenenti alla retta verticale di equazione $\operatorname{Re} z = 1$ o da punti del semipiano destro individuato da tale retta.



a5) Sia $A = \{x_n = 3 - \frac{2}{n}\ ;\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$. Determinate $\inf A$ e $\sup A$.

Soluzione.

L'insieme A è limitato in $\mathbb{R}$. Infatti la successione a termini positivi $\left\{\frac{2}{n}\right\}_{n\geq 1}$ è decrescente e ha massimo uguale a 2 per $n = 1$; ne segue quindi che per ogni numero naturale n maggiore o uguale a 1 si ha

$$1 = x_1 \leq x_n < 3.$$

Osserviamo perciò che si ha $\inf A = \min A = 1$ e che 3 è un maggiorante di A. Dimostriamo ora che 3 è il minimo tra i maggioranti di A e che quindi si ha $\sup A = 3$. In particolare, dimostriamo che per ogni numero reale minore di 3 esiste un elemento di A maggiore di esso, cioè che per ogni numero reale positivo ε esiste un numero $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$3 - \varepsilon < 3 - \frac{2}{n_\varepsilon}.$$

Questa disequazione è equivalente a $\frac{2}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ e quindi a $\frac{2}{\varepsilon} < n_\varepsilon$, che ha soluzione per la proprietà di Archimede [lezione 5, pag. 38].

a6) Determinate il dominio naturale della seguente funzione $f(x) = \arcsin(x^2 - 3)$.

Soluzione.

Poiché il dominio della funzione $\arcsin x$ è l'intervallo $[-1, 1]$, il dominio di f è l'insieme dei numeri reali x tali che $-1 \leq x^2 - 3 \leq 1$. L'insieme delle soluzioni di questo sistema di disequazioni è l'insieme delle soluzioni di $2 \leq x^2 \leq 4$, cioè l'insieme

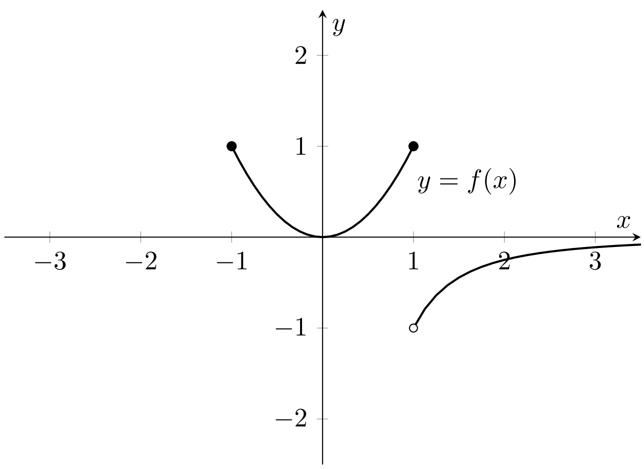
$$(]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[) \cap [-2, 2],$$

che è $[-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$.

a7) Sia $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Determinate l'immagine di f.

Soluzione.



L'immagine di f è l'insieme $\{f(x) : x \in \operatorname{dom} f\}$, cioè l'insieme delle ordinate dei punti del grafico di f, che può essere individuato proiettando il grafico di f sull'asse delle y. Dalla figura, in cui abbiamo rappresentato una parte significativa del grafico di f e la sua proiezione sull'asse delle y, deduciamo che l'immagine di f è l'insieme $\operatorname{im} f =]-1, 1]$.

a8) Dite se la funzione $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (\log x)^3$ è iniettiva (motivate la risposta; 'sì' o 'no' non sono una risposta motivata!).

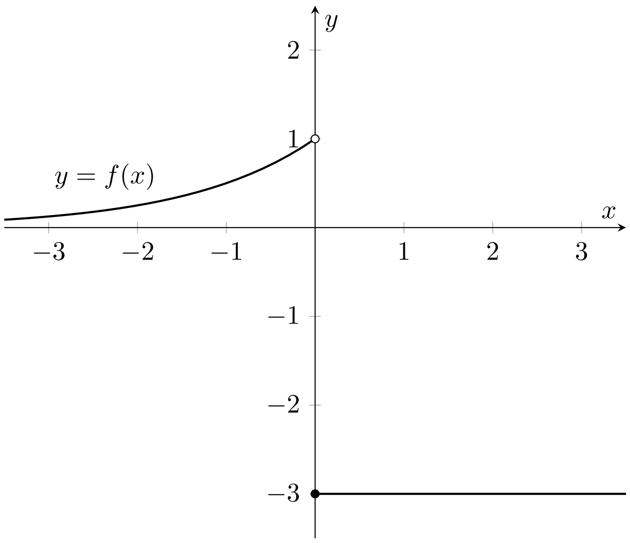
Soluzione.

La funzione f è la composizione $g \circ h$ delle due funzioni $g(x) = x^3$ e $h(x) = \log x$. Ciascuna delle funzioni g e h è iniettiva, poiché è definita su un intervallo su cui è strettamente crescente. La funzione f è quindi iniettiva, poiché composizione di funzioni iniettive.

a9) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x < 0 \\ -3 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Determinate la funzione composta $(f \circ f)(x)$.

Soluzione.



Per definizione di funzione composta abbiamo

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} 2^{f(x)} & \forall x \in \operatorname{dom} f : f(x) < 0 \\ -3 & \forall x \in \operatorname{dom} f : f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Dal grafico di f deduciamo che l'insieme $\{x \in \operatorname{dom} f : f(x) < 0\}$ è l'intervallo $[0, +\infty[$ e per tali x vale $f(x) = -3$; inoltre l'insieme $\{x \in \operatorname{dom} f : f(x) \geq 0\}$ è l'intervallo $]-\infty, 0[$. Abbiamo quindi

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} 2^{-3} = \frac{1}{8} & \text{se } x \geq 0 \\ -3 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a10) Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sin x}}{3x}$.

Soluzione.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Per $x > 0$ abbiamo

$$\frac{\sqrt{x^2 + \sin x}}{3x} = \frac{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{\sin x}{x^2}\right)}}{3x} = \frac{x\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}}{3x} = \frac{\cancel{x}\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}}{3\cancel{x}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{\sin x}{x^2}}}{3}.$$

Siccome la funzione seno è limitata su $\mathbb{R}$ (infatti per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo $-1 \leq \sin x \leq 1$), vale $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ e la funzione radice quadrata è una funzione continua, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sin x}}{3x} = \frac{1}{3}.$$

Svolgimento seconda parte

b1) i) Sia $w = 1 - \sqrt{3}i$. Determinate le radici cubiche in $\mathbb{C}$ di w e rappresentatele nel piano di Gauss.

ii) Data w in i), rappresentate graficamente nel piano di Gauss l'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq |z - 2|\}.$$

iii) Risolvete in $\mathbb{C}$ l'equazione $2z^2 - |z|^2 = \overline{z}$.

Soluzione.

i) Per calcolare le radici cubiche di w è opportuno scrivere w in forma trigonometrica. Cerchiamo quindi un qualunque numero reale φ tale che

$$w = |w| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

cioè tale che

$$1 - \sqrt{3}i = 2(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Quest'ultima uguaglianza è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

una cui soluzione è $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Perciò abbiamo

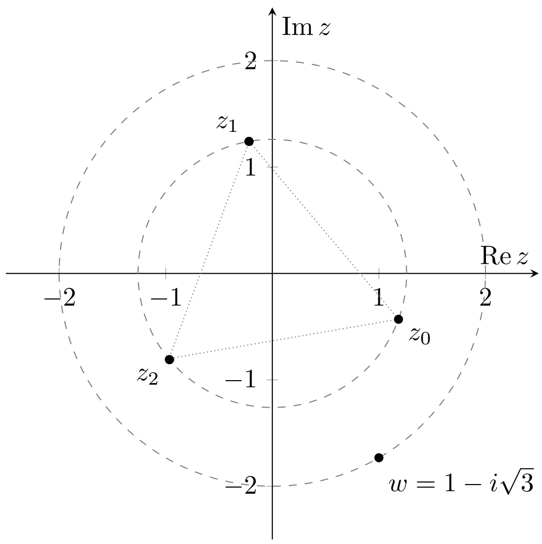
$$w = 2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})).$$

Le radici cubiche di un numero complesso $\rho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)$ scritto in forma trigonometrica si ottengono prendendo $k = 0, 1, 2$ nella seguente espressione

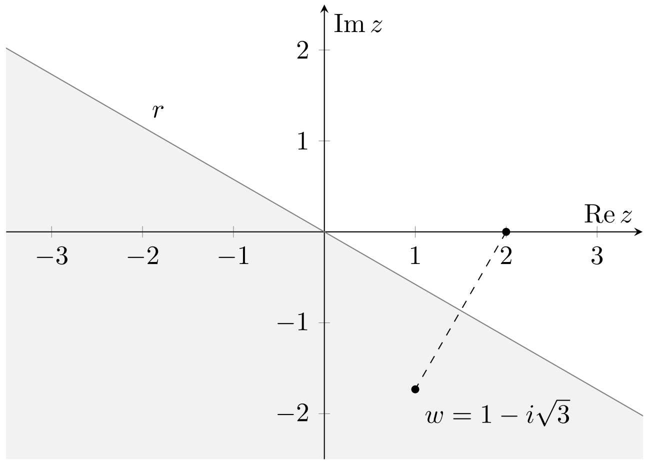
$$\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta + 2k\pi}{3} + i \sin\frac{\vartheta + 2k\pi}{3}\right).$$

Perciò le radici cubiche di w sono i tre numeri complessi

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{2}(\cos(-\frac{\pi}{9}) + i \sin(-\frac{\pi}{9})) \\ z_1 &= \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{5\pi}{9}) + i \sin(\frac{5\pi}{9})) \\ z_2 &= \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{11\pi}{9}) + i \sin(\frac{11\pi}{9})). \end{aligned}$$



Nel piano di Gauss i punti che corrispondono alle radici cubiche complesse z_0, z_1, e z_2 di w sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[3]{2}$.
ii) L'insieme A ha per elementi i numeri complessi che hanno distanza da w minore o uguale a quella che hanno da 2. La rappresentazione grafica di A nel piano complesso è quindi il semipiano chiuso il cui bordo è perpendicolare al segmento di estremi w e 2 e passa per il punto medio del segmento. Osserviamo che l'origine appartiene al bordo di A, poiché la sua distanza è 2 sia da 2 sia da w. Questo insieme è colorato in grigio in figura.



Per determinare l'insieme A analiticamente poniamo $z = x + iy$. Ricordando che il modulo $|z|$ di z è $\sqrt{x^2 + y^2}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
|z-w| \leq |2-z| \iff&\quad \sqrt{(x-1)^2 + (y+\sqrt{3})^2} \leq \sqrt{(2-x)^2 + y^2} \\
\iff&\quad (x-1)^2 + (y+\sqrt{3})^2 \leq (2-x)^2 + y^2 \\
\iff&\quad x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 \leq 4 - 4x + x^2 + y^2 \\
\iff&\quad y \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}x.
\end{aligned}$$

Le soluzioni della disequazione $y \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ sono i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che si trovano sotto o sulla retta r di equazione $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ (vedi figura).
iii) Ponendo $z = x + iy$, dove x e y sono la parte reale e la parte immaginaria di z, rispettivamente, otteniamo

$$\begin{aligned}
2(x+iy)^2 - (x^2+y^2) = x - iy \iff&\ 2(x^2 + i2xy - y^2) - (x^2+y^2) = x - iy \\
\iff&\ (x^2 - x - 3y^2) + (4xy + y)i = 0.
\end{aligned}$$

Poiché un numero complesso è uguale a 0 se e solo se sia la sua parte reale sia la sua parte immaginaria sono uguali a 0, l'ultima equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - x - 3y^2 = 0 \\ y(4x+1) = 0. \end{cases}$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto, la seconda equazione del sistema ha come soluzioni $y = 0$ oppure $x = -\frac{1}{4}$. Sostituendo $y = 0$ nella prima equazione otteniamo $x^2 - x = 0$, le cui soluzioni sono $x = 0$ e $x = 1$. Sostituendo invece $x = -\frac{1}{4}$ otteniamo $\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 3y^2 = 0$, cioè $y^2 = \frac{5}{16 \cdot 3}$, che le cui soluzioni sono $y = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{3}}$ e $y = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{3}}$. Le soluzioni dell'equazione data sono dunque

$$z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{3}}i \text{ e } z_4 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{3}}i.$$

b2) Usando il principio di induzione verificate che

$$\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = 2^n(n-1)+1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

Soluzione.

Per ogni $n \in \mathbb{N}\,, n \geq 0$, poniamo $P(n) =$ "$\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = 2^n(n-1)+1$".

Vogliamo dimostrare che l'enunciato $P(n)$ è vero per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$, ossia che l'uguaglianza data è vera per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$, usando il principio di induzione [lezione 11, pag. 113].

Per questo dobbiamo dimostrare due cose:

i) $P(0)$ è vero;

ii) per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, da $P(n)$ vero segue che anche $P(n+1)$ è vero.

Verifichiamo allora per primo i).

Questo è immediato: infatti, per $n = 0$ abbiamo $\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = 0$ e anche $2^n(n-1)+1 = 0$.

Ora proviamo ii).

Fissiamo un $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, qualsiasi e supponiamo che l'uguaglianza in $P(n)$ sia verificata per tale n (ipotesi induttiva). Dobbiamo provare che otteniamo allora anche vero $P(n+1)$, ossia vera l'uguaglianza per $n+1$.

In altre parole, dobbiamo mostrare che dall'uguaglianza $\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = 2^n(n-1)+1$ segue l'uguaglianza $\sum_{k=0}^{n+1} k2^{k-1} = 2^{n+1}n+1$.

Consideriamo inizialmente il membro sinistro dell'uguaglianza che vogliamo verificare.

Scriviamo $\sum_{k=0}^{n+1} k2^{k-1}$ in modo tale da poter usare l'ipotesi induttiva:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} + (n+1)2^n.$$

Ora usando l'ipotesi induttiva sostituiamo nel membro destro dell'uguaglianza appena scritta l'addendo $\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1}$ con $2^n(n-1)+1$. Otteniamo

$$\sum_{k=0}^{n+1} k2^{k-1} = 2^n(n-1)+1+(n+1)2^n.$$

Osserviamo che abbiamo

$$2^n(n-1)+1+(n+1)2^n = 2n2^n+1 = n2^{n+1}+1.$$

Questo conclude la dimostrazione del passo induttivo ii), perché abbiamo provato l'uguaglianza $\sum_{k=0}^{n+1} k2^{k-1} = 2^{n+1}n+1$.

Quindi in conclusione: abbiamo provato i) e ii). Quindi, usando il principio di induzione abbiamo dimostrato che l'uguaglianza definita attraverso $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

b3) Sia $f : [-10, e] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+2} & \text{se } -10 \le x \le -1 \\ -\frac{2}{\pi} \arcsin x & \text{se } -1 < x \le 1 \\ a + \log x & \text{se } 1 < x \le e. \end{cases}$

i) Determinate $a \in \mathbb{R}$ tale che f risulti continua su $[-10, e]$.

ii) Per tale valore di a, usando la rappresentazione grafica di f,

a) determinate $\inf\limits_{[-10,e]} f$ e $\sup\limits_{[-10,e]} f$. Essi sono minimo e massimo, rispettivamente?

b) determinate i punti di minimo locale e i punti di massimo locale di f.

c) rappresentate graficamente la funzione $x \mapsto -2f(x-2)$.

iii) Dite (motivando le risposte) quale delle seguenti scritture è corretta:

$$f(x) = o(1) \text{ per } x \to 0; \qquad f(x) = o(x) \text{ per } x \to 0.$$

Soluzione.

i) Le funzioni ristrette $f|_{[-10,-1]}$, $f|_{]-1,1]}$ e $f|_{]1,e]}$ sono continue. Calcoliamo il limite sinistro e il limite destro di f nei punti $x = -1$ e $x = 1$. Per il punto $x = -1$ abbiamo

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \sqrt[3]{x+2} = 1$$

e

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (\frac{2}{\pi} \arcsin x) = -\frac{2}{\pi} \cdot (-\frac{\pi}{2}) = 1.$$

Poiché entrambi i limiti sono uguali a 1, che è anche il valore di f in $x = -1$, la funzione f è continua in $x = -1$.

Per il punto $x = 1$ abbiamo

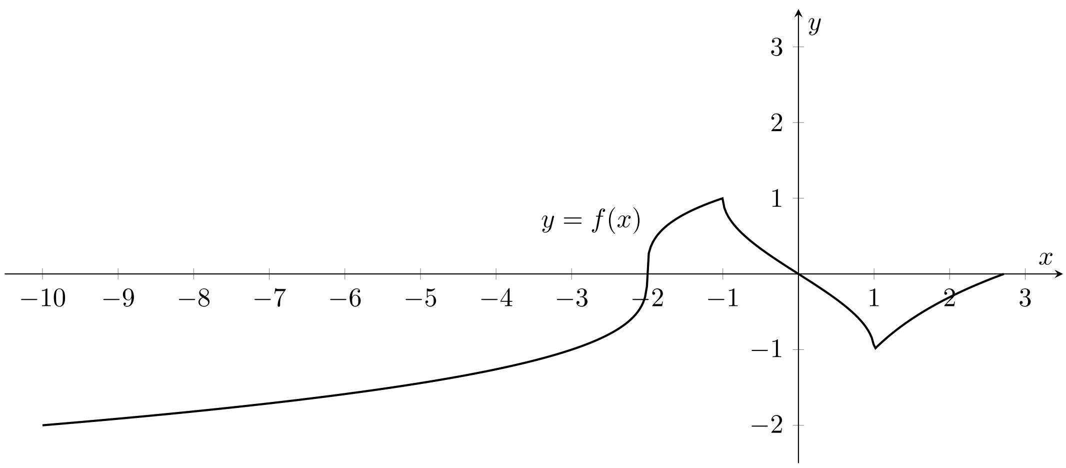
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-\frac{2}{\pi} \arcsin x) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = -1$$

e

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (a + \log x) = a.$$

Poiché vale $f(1) = -1$, affinché la funzione f sia continua anche in $x = 1$ dobbiamo avere $a = -1$.

ii) Per il parametro $a = -1$ il grafico di f risulta



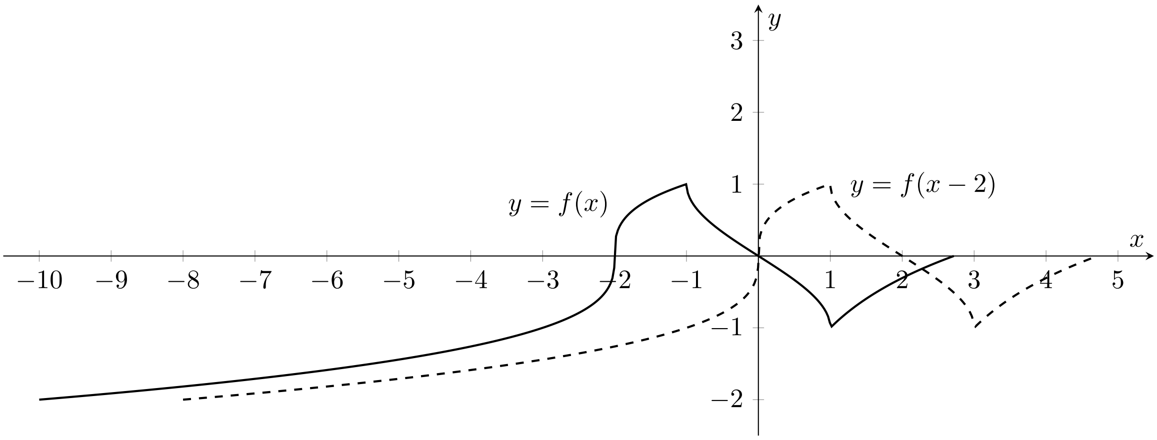
a) Dalla rappresentazione grafica deduciamo

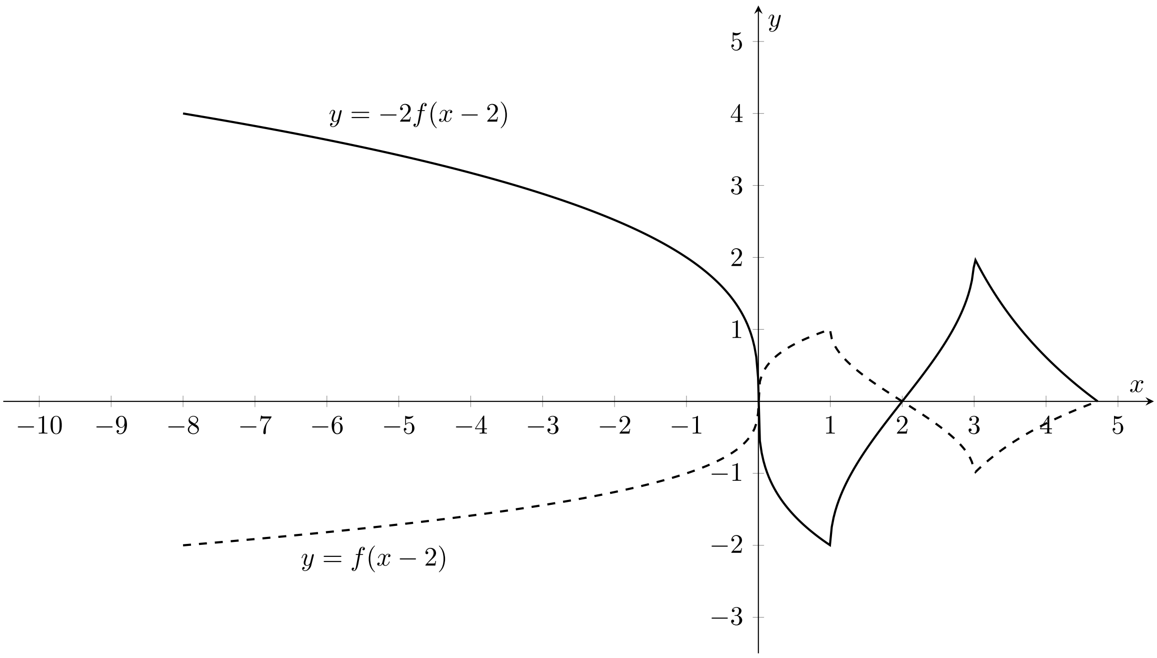
$$\inf_{[-10,e]} f = \min_{[-10,e]} f = f(-10) = -2$$

$$\sup_{[-10,e]} f = \max_{[-10,e]} f = f(-1) = 1.$$

b) La funzione ha due punti di massimo locale, $x = -1$ e $x = e$, e due punti di minimo locale, $x = -10$ e $x = 1$.

c) Rappresentiamo innanzitutto il grafico della funzione $x \mapsto f(x-2)$, che ha dominio $[-8, e+2]$. Esso si ottiene traslando il grafico di f di 2 a destra. Rappresentiamo poi il grafico la funzione $x \mapsto -2f(x-2)$, che ha dominio $[-8, e+2]$. Esso si ottiene moltiplicando per -2 le ordinate dei punti del grafico della funzione $x \mapsto f(x-2)$; geometricamente il grafico della funzione $x \mapsto f(x-2)$ viene dilatato di un fattore 2 lungo l'asse delle y e successivamente riflesso rispetto all'asse delle x.





iii) Per $-1 < x \leq 1$ abbiamo $f(x) = -\frac{2}{\pi}\arcsin(x)$. Poiché vale $\lim_{x\to 0} \arcsin x = 0$, otteniamo $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Usando la notazione degli o-piccoli [lezione 21, pag. 234], tale limite si scrive $f(x) = o(1)$ per $x \to 0$. Perciò la scrittura $f(x) = o(1)$ per $x \to 0$ è corretta.

La scrittura $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$ esprime invece un fatto falso, poiché abbiamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{\pi}\frac{\arcsin x}{x}\right) = -\frac{2}{\pi}$$

e non $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

b4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (x+1)^3 - 2$.

i) Determinate l'espressione della funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e rappresentatela graficamente.

ii) Quanto vale $f^{-1}(-2)$?

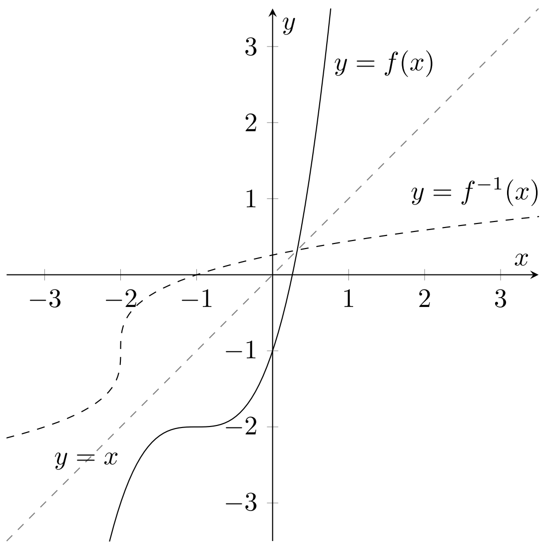
Soluzione.

i) Per determinare l'espressione della funzione f^{-1} risolviamo per ogni $y \in \mathbb{R}$ l'equazione $y = (x+1)^3 - 2$ rispetto alla variabile x:

$$y = (x+1)^3 - 2 \iff x = \sqrt[3]{y+2} - 1.$$

Otteniamo perciò $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+2} - 1$.

Geometricamente il grafico di $x \mapsto f^{-1}(x)$ (in rosso) si ottiene riflettendo il grafico di f (in nero) rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, che ha equazione $y = x$.



ii) Usando l'espressione di f^{-1} otteniamo $f^{-1}(-2) = \sqrt[3]{-2+2} - 1 = -1$.

b5) Determinate al variare di $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, il limite $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x^2}{[\log(1+x)]^k}$.

Soluzione.

Riscriviamo l'espressione all'interno del limite in modo da poter poi usare limiti notevoli [lezione 19, pag. 206] e [lezione 20, pag. 223]. Abbiamo

$$\frac{\sin x^2}{[\log(1+x)]^k} = \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot \frac{x^k}{[\log(1+x)]^k} \cdot x^{2-k}. \tag{1}$$

Poiché vale $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, dal limite notevole $\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ otteniamo $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$ come limite di funzioni composte. Usando l'algebra dei limiti [lezione 17, pag. 186] e il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ otteniamo $\lim_{x \to 0} \frac{x^k}{[\log(1+x)]^k} = 1$. Per l'algebra estesa dei limiti abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^2}{[\log(1+x)]^k} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x^k}{[\log(1+x)]^k} \cdot \lim_{x \to 0^+} x^{2-k}.$$

Perciò otteniamo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x^2}{[\log(1+x)]^k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 2 \\ 1 & \text{se } k = 2 \\ +\infty & \text{se } k > 2. \end{cases}$$

b6) i) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. L'insieme A si dice *limitato superiormente* se ...

ii) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Scrivete in matematichese il significato della scrittura

$$\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty.$$

Soluzione.

i) L'insieme A si dice *limitato superiormente* se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in A$ vale $x \leq M$.

ii) Per ogni intorno $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ di $+\infty$ esiste un intorno $U \subseteq \mathbb{R}$ di 3 tale che per ogni $x \in U \setminus \{3\}$ si ha $f(x) \in V$. Equivalentemente possiamo scrivere

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta_M > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 3| < \delta_M \implies f(x) > M.$$

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

Prova scritta di Analisi Matematica 1
A.A. 2019–2020 — Trento, 20 dicembre 2019

Svolgimento prima parte

a1) Calcolate la derivata prima della funzione $f(x) = (\arctan(5x^2+1))^2$.

Soluzione.

La funzione $f(x)$ è la funzione composta $(u \circ v \circ w)(x)$, cioè $f(x) = u(v(w(x)))$, con $u(x) = x^2$, $v(x) = \arctan x$ e $w(x) = 5x^2 + 1$. Calcoliamo la derivata prima $f'(x)$ della funzione composta $f(x)$ usando il teorema della derivata di una funzione composta [lezione 25, pag. 276]:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(v(w(x))) \cdot v'(w(x)) \cdot w'(x) \\ &= 2 \cdot v(w(x)) \cdot \frac{1}{1+w(x)^2} \cdot 10x \\ &= 2 \cdot \arctan(5x^2+1) \cdot \frac{1}{1+(5x^2+1)^2} \cdot 10x \\ &= \frac{20x \arctan(5x^2+1)}{1+(5x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

a2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = 2x + e^x$. Calcolate $(f^{-1})'(1)$.

Soluzione.

La funzione f ammette inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, poiché l'immagine di f è $\mathbb{R}$ ed f è iniettiva in quanto somma di due funzioni strettamente crescenti. Determiniamo il valore $(f^{-1})'(1)$ usando il teorema della derivata della funzione inversa [lezione 25, pag. 277]. L'equazione $f(x) = 1$, cioè $2x + e^x = 1$, ha un'unica soluzione, che è $x = 0$. Poiché abbiamo $f'(x) = 2 + e^x$ e quindi vale $f'(0) = 3$, otteniamo

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}.$$

a3) Dite per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin(2x)}{x} & \text{se } -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ e^x + \alpha & \text{se } 0 \le x \le 1 \end{cases}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass (motivate la risposta).

Soluzione.

La funzione f è definita sull'intervallo chiuso e limitato $[-\frac{1}{2}, 1]$. Affinché f soddisfi tutte le ipotesi del teorema di Weierstrass [lezione 23, pag. 253], è necessario che f sia continua su tale intervallo. Poiché ciascuna delle restrizioni di f agli intervalli $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$ e $[0,1]$ è continua, basta determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che f risulti continua anche in $x = 0$. La funzione f è continua in $x = 0$ se e solo se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$. Osserviamo che la seconda uguaglianza è verificata poiché f ristretta a $[0,1]$ è continua. Usando il limite notevole [lezione 19, pag. 206] $\lim_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\arcsin(2x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 2 \cdot \frac{\arcsin(2x)}{2x} = 2.$$

Perciò f è continua in $x = 0$ se e solo se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, cioè se e solo se $2 = 1 + \alpha$. Quindi per $\alpha = 1$.

a4) Determinate i punti critici della funzione $f(x) = x^3 - x$ definita su $\mathbb{R}$.

Soluzione.

Per definizione di un punto critico [lezione 26, pag. 283] dobbiamo trovare gli zeri della derivata f' di f. Questi sono le soluzioni dell'equazione $f'(x) = 0$, che è $3x^2 - 1 = 0$ e ha due soluzioni: $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

a5) Calcolate $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{2x^3}$.

Soluzione.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $[\frac{0}{0}]$. Presentiamo due possibili procedimenti per il calcolo di tale limite.

Modo 1: con il teorema di de l'Hôpital [lezione 28, pag. 310].

Il rapporto tra la derivata prima del numeratore e quella del denominatore di $\dfrac{\sin x - x}{2x^3}$ è $\dfrac{\cos x - 1}{6x^2}$. Usando il limite notevole [lezione 19, pag. 206] del coseno otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{6x^2} = \frac{1}{6} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}.$$

Quindi per il teorema di de l'Hôpital [lezione 28, pag. 310] abbiamo $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{2x^3} = -\dfrac{1}{12}$.

Modo 2: usando gli sviluppi di Taylor [lezione 30, pag. 323]. Per $x \to 0$ abbiamo $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$. Otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{2} = -\frac{1}{12},$$

poiché per definizione di o-piccolo vale $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(x^3)}{x^3} = 0$.

a6) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato in $x_0 = 1$, della funzione $f(x) = e^x$.

Soluzione.

Il polinomio di Taylor di f di ordine 2 centrato in 1 è

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k,$$

dove $f^{(k)}(1)$ è la derivata k-esima di f calcolata in 1. Poiché vale $f^{(0)}(x) = f^{(1)}(x) = f^{(2)}(x) = e^x$, otteniamo

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f^{(0)}(1) + f^{(1)}(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2}(x-1)^2 \\ &= e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2 \\ &= e\left[1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2}\right]. \end{aligned}$$

a7) Determinate il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n}$.

Soluzione.

La serie è a termini positivi. Studiamo il carattere della serie usando il criterio della radice n-esima. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\frac{1}{2} \le \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{2^n}} \le \sqrt[n]{\frac{n^2+n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n^2}}{2}.$$

Ricordando che vale $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ otteniamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{2}\,(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2}$. Usando il teorema del confronto o dei due carabinieri [lezione 17, pag. 190] troviamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+1}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

e quindi per il criterio della radice n-esima [lezione 33, pag. 354] la serie è convergente.

a8) Determinate l'integrale $\displaystyle\int x\sin(x^2)\,dx$.

Soluzione.

L'integrale richiesto è l'insieme delle primitive della funzione $x\sin(x^2)$, cioè l'insieme delle funzioni la cui derivata prima è $x\sin(x^2)$. Ricordando la formula per la derivata di una funzione composta, otteniamo

$$\int x\sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\int 2x\cdot\sin(x^2)\ dx = \frac{1}{2}\big[-\cos(x^2)\big] + c,\ \ c\in\mathbb{R}.$$

a9) Determinate gli $\alpha \geq 0$ tali che l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{x^{\alpha+1}}\,dx$ risulti convergente.

Soluzione.

La funzione integranda $f(x) = \dfrac{\log(1+\sqrt{x})}{x^{\alpha+1}}$ è continua e positiva sull'intervallo $]0,1]$. Usando lo sviluppo di Taylor del logaritmo otteniamo

$$f(x) = \frac{\log(1+\sqrt{x})}{x^{\alpha+1}} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}, \quad \text{per } x\to 0^+,$$

cioè $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}} = 1$. Per il criterio del confronto asintotico [lezione 40, pag. 423] l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx < +\infty$ è convergente se se solo se l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}}\ dx < +\infty$ è convergente. Quest'ultimo integrale è convergente se e solo se $\alpha + \frac{1}{2} < 1$, cioè se e solo se $\alpha < \frac{1}{2}$.

a10) Trovate l'insieme delle soluzioni dell'equazione $y'(x) = -\frac{1}{2}y(x)$.

Soluzione.

L'equazione data è un'equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine. Poiché una primitiva di $-\frac{1}{2}$ è $-\frac{x}{2}$, dalla formula risolutiva risulta

$$y(x) = ce^{-\frac{x}{2}}, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Svolgimento seconda parte

b1) i) Determinate i valori di α e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \sin(\alpha x^2 - x) & \text{se } x < 0 \\ \alpha \log(1+x) + \beta e^{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

risulti continua e derivabile in $x_0 = 0$.

ii) Per tali valori di α e β

a) determinate $f'(0)$;

b) scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$;

c) Calcolate $\displaystyle\int_0^1 \left(f(x) + e^{2x}\right)\, dx$.

Soluzione.

(i) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ristretta agli intervalli $]-\infty, 0[$ e $[0, +\infty[$ è continua, poiché è ottenuta con somme e composizioni di funzioni continue. Affinché f sia continua su $\mathbb{R}$, basta determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che f risulti continua in $x = 0$, cioè che valgano le uguaglianze

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x).$$

La funzione $\alpha \log(1+x) + \beta e^{2x}$ sull'intervallo $[0, +\infty[$ è continua in $x = 0$ e quindi abbiamo $f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \beta$. Perciò f è continua in $x = 0$ se e solo se vale

$$\beta = \lim_{x \to 0^-} \left[-1 + \sin(\alpha x^2 - x)\right],$$

che è equivalente a $\beta = -1$. Consideriamo quindi la funzione f

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \sin(\alpha x^2 - x) & \text{se } x < 0 \\ \alpha \log(1+x) - e^{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

che è continua su $\mathbb{R}$. Questa funzione ristretta agli intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ è derivabile, poiché è ottenuta con somme e composizioni di funzioni derivabili. Osserviamo che la derivata prima f' di f per $x \neq 0$ è data da

$$f'(x) = \begin{cases} (2\alpha x - 1)\cos(\alpha x^2 - x) & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{\alpha}{1+x} - 2e^{2x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x = 0$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dal corollario del teorema di de l'Hôpital [lezione 29, pag. 316] otteniamo

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \Big[(2\alpha x - 1)\cos(\alpha x^2 - x)\Big] = -1$$

e

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\alpha}{1+x} - 2e^{2x}\right] = \alpha - 2.$$

Perciò f è derivabile in $x = 0$ se e solo se vale l'uguaglianza $-1 = \alpha - 2$, ossia $\alpha = 1$.

(ii) Per $\alpha = 1$ e $\beta = -1$ la funzione definita in (i) è

$$f(x) = \begin{cases} -1 + \sin(x^2 - x) & \text{se } x < 0 \\ \log(1+x) - e^{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

e risulta continua e derivabile su $\mathbb{R}$.
(a) In (i) abbiamo già calcolato $f'(0) = f'_+(0) = f'_-(0) = -1$.

(b) L'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa $x_0 = 0$ è

$$y = f(0) + f'(0)(x - 0),$$

cioè $y = -1 - x$.

(c) La funzione $f(x) + e^{2x}$ ristretta all'intervallo $[0, 1]$ è $\log(1 + x)$. Abbiamo perciò

$$\int_0^1 (f(x) + e^{2x})\, dx = \int_0^1 \log(1 + x)\, dx.$$

Calcoliamo l'integrale usando il metodo dell'integrazione per sostituzione [lezione 38, pag. 402], definendo $t = 1 + x$. Abbiamo quindi $x = \varphi(t) = t - 1$, dove $t \in [1, 2]$, e $\varphi'(t) = 1$. Otteniamo perciò

$$\int_0^1 \log(1 + x)\, dx = \int_1^2 \log t\, dt.$$

Una primitiva $F(t)$ di $\log t$ si ottiene integrando per parti [lezione 38, pag. 400]

$$F(t) = t \log t - t.$$

Quindi otteniamo

$$\int_1^2 \log t\, dt = F(2) - F(1) = 2 \log 2 - 2 - (\log 1 - 1) = 2 \log 2 - 1.$$

b2) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, non-derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione

$$f(x) = (x + |x + 1|)e^{-x^2}.$$

Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.

ii) Determinate, usando la definizione, l'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} x f(x)\, dx$.

Soluzione.

Dominio. La funzione f è ottenuta con somme, prodotti e composizioni di funzioni elementari continue definite in $\mathbb{R}$; perciò abbiamo $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Segno. Per definizione di valore assoluto si ha

$$|x + 1| = \begin{cases} -x - 1 & \text{se } x < -1 \\ x + 1 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$

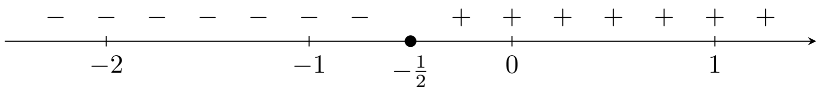
e quindi otteniamo

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x^2} & \text{se } x < -1 \\ (2x + 1)e^{-x^2} & \text{se } x \geq -1. \end{cases}$$

Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo $e^{-x^2} > 0$. La funzione $2x + 1$ è negativa per $x < -\frac{1}{2}$, nulla per $x = -\frac{1}{2}$ e positiva per $x > -\frac{1}{2}$. Perciò abbiamo

$$f(x) < 0 \quad \text{se } x < -\frac{1}{2}, \qquad f(x) = 0 \quad \text{se } x = -\frac{1}{2}, \qquad f(x) > 0 \quad \text{se } x > -\frac{1}{2}.$$

Rappresentiamo il segno di f.



Comportamento agli estremi del dominio. Gli estremi del dominio sono $-\infty$ e $+\infty$. Per $x \to -\infty$ abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -e^{-x^2} = 0$$

Per $x \to +\infty$ usando la gerarchia degli infiniti [lezione 24, pag. 208] otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{e^{x^2}} = 0.$$

Perciò la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale di f sia per $x \to -\infty$ sia per $x \to +\infty$.

Continuità. La funzione f è ottenuta con somme, prodotti e composizioni di funzioni elementari continue definite in $\mathbb{R}$; perciò f è continua su $\mathbb{R}$.

Derivabilità/non-derivabilità. La funzione f è derivabile negli intervalli $]-\infty,-1[$ e $]-1,+\infty[$, perché è ottenuta con somme, prodotti e composizioni di funzioni derivabili. Abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{se } x < -1 \\ -2(2x^2+x-1)e^{-x^2} & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

Studiamo la derivabilità di f in $x = -1$. Abbiamo

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^-} 2xe^{-x^2} = -2e^{-1} = -\frac{2}{e} \neq 0$$

e

$$\lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1^+} -2(2x^2+x-1)e^{-x^2} = -2(2-1-1)e^{-1} = 0.$$

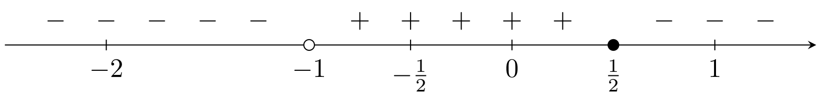
Poiché f è continua in $x = -1$, dal corollario del teorema di de l'Hôpital [lezione 29, pag. 316] segue che

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to-1^-} f'(x) \quad \text{e} \quad f'_+(-1) = \lim_{x\to-1^+} f'(x)$$

e quindi $f'_+(-1) = 0$ e $f'_-(-1) = -\frac{2}{e}$. Dato che abbiamo $f'_-(-1) \neq f'_+(-1)$, la funzione f non è derivabile in $x = -1$. Perciò il dominio di f' è l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. In particolare $(-1, f(-1)) = (-1, -e^{-1})$ è un punto angoloso del grafico di f.

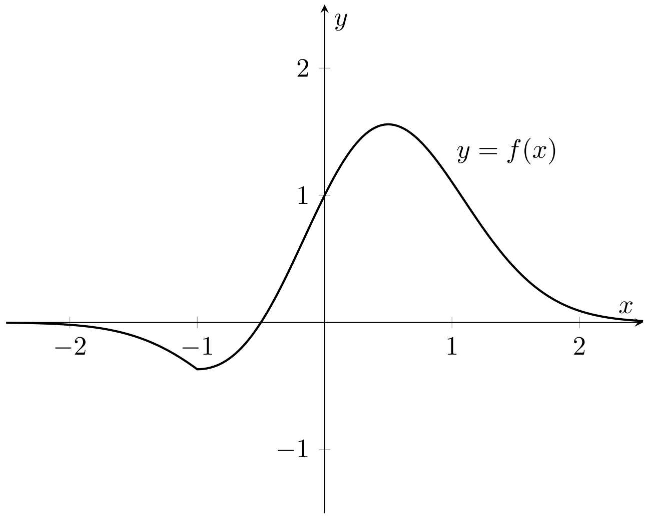
Punti critici e loro natura. Ricordiamo che un punto critico di f è un punto del dominio di f' in cui si annulla f'. Nell'intervallo $]-\infty,-1[$ la derivata f' non si annulla. La derivata f' si annulla in un punto dell'intervallo $]-1,+\infty[$ se e solo se il punto è soluzione dell'equazione $2x^2+x-1 = 0$. Poiché le soluzioni reali dell'equazione sono $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$, la funzione f ha un unico punto critico in $x = \frac{1}{2}$.

Per individuare la natura del punto critico e gli intervalli di monotonia di f guardiamo il segno della derivata f'.



Perciò la funzione f è strettamente decrescente su ciascuno degli intervalli $]-\infty,-1]$ e $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ ed è strettamente crescente sull'intervallo $[-1,\frac{1}{2}]$. Quindi $x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo locale stretto di f e vale $f(\frac{1}{2}) = 2e^{-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e}} \approx 1.6$.

Osserviamo infine che il punto $x = -1$ è un punto di minimo locale di f e vale $f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0.4$. Rappresentiamo il grafico G_f sull'intervallo $[-2.5, 2.5]$.



(ii) Una primitiva della funzione $xf(x) = -xe^{-x^2}$ è $\frac{1}{2}e^{-x^2}$. Grazie al teorema di Torricelli-Barrow [lezione 37, pag. 392] per ogni $K < -1$ si ha

$$\int_K^{-1} -xe^{-x^2}\, dx = F(-1) - F(K) = \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-K^2}.$$

Usando la definizione di integrale improprio [lezione 39, pag. 415] otteniamo

$$\int_{-\infty}^{-1} xf(x)\, dx = \lim_{K\to-\infty} \int_K^{-1} -xe^{-x^2}\, dx = \lim_{K\to-\infty} \left[\frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-K^2}\right] = \frac{1}{2e}$$

b3) Determinate i limiti

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1 + \sin x^2 - \log^2(1+\sqrt{2}x)}{x^3}$

ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1 + \sin t^2 - \log^2(1+\sqrt{2}t))\, dt}{x^4}.$

Soluzione.

(i) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per calcolarlo usiamo gli sviluppi di Taylor. Poiché il denominatore è x^3, è sufficiente sviluppare il numeratore fino al terzo ordine. Tenendo conto degli argomenti che verranno inseriti al posto di t negli sviluppi per $t \to 0$ delle funzioni elementari e^t, $\sin t$ e $\log(1+t)$ e del fatto che il logaritmo è elevato al quadrato, basta considerare gli sviluppi:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + o(t^2), \quad \sin t = t + o(t^2), \quad \log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
&e^{x^2} - 1 + \sin x^2 - \log^2(1+\sqrt{2}x) = \\
&\qquad = (1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)) - 1 + (x^2 + o(x^4)) - (\sqrt{2}x - 2\cdot\frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 = \\
&\qquad = (1 + x^2 + o(x^3)) - 1 + (x^2 + o(x^3)) - (2x^2 - 2\sqrt{2}x^3 + o(x^3)) = \\
&\qquad = 2\sqrt{2}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

Perciò otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1 + \sin x^2 - \log^2(1+\sqrt{2}x)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{2}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} (2\sqrt{2} + \frac{o(x^3)}{x^3}) = 2\sqrt{2}.$$

(ii) Il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Poiché al numeratore c'è una funzione integrale, per calcolare il limite usiamo il teorema di de l'Hôpital [lezione 28, pag. 310]. Le ipotesi del teorema sono soddisfatte: infatti il numeratore è una funzione derivabile per il teorema fondamentale del calcolo e il denominatore è una funzione derivabile la cui derivata $4x^3$ non si annulla per $x > 0$. Grazie al teorema fondamentale del calcolo integrale [lezione 37, pag. 388] si ha

$$\left(\int_0^x e^{t^2} - 1 + \sin t^2 - \log^2(1 + \sqrt{2}t)dt\right)' = e^{x^2} - 1 + \sin x^2 - \log^2(1 + \sqrt{2}x)$$

e quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} - 1 + \sin t^2 - \log^2(1 + \sqrt{2}t)dt\right)'}{(x^4)'} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - 1 + \sin x^2 - \log^2(1 + \sqrt{2}x)}{4x^3} \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

dove nel calcolo del secondo limite abbiamo usato il valore ottenuto in (i). Applicando il teorema di de L'Hôpital otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \left(e^{t^2} - 1 + \sin t^2 - \log^2(1 + \sqrt{2}t)\right) dt}{x^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b4) i) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \frac{1}{n}$.

ii) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$, l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n^\alpha}$.

Soluzione.

(i) Abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{n^{\alpha+2}}\right).$$

Ricordiamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ è convergente: infatti è una serie armonica generalizzata [lezione 41, pag. 435] della forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 1$. Quindi il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{n^{\alpha+2}}\right)$ è determinato dal carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+2}}$. Perciò la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{n^{\alpha+2}}\right) \text{ è } \begin{cases} \text{convergente} & \text{se } \alpha + 2 > 1, \text{ cioè se } \alpha > -1, \\ \text{divergente negativamente} & \text{se } \alpha + 2 \leq 1, \text{ cioè se } \alpha \leq -1. \end{cases}$$

(ii) Osserviamo che la serie è la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-2)^n$ con coefficienti $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Per il teorema di determinazione del raggio di convergenza [lezione 35, pag. 370] il raggio di convergenza R della serie è

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}}.$$

Poiché abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{\alpha}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{\alpha}{n}\log n} = 1,$$

otteniamo $R = 1$. Perciò per ogni x reale per cui vale $|x - 2| < 1$, cioè per ogni $x \in]1, 3[$ la serie converge, mentre non converge per ogni $x \notin [1, 3]$. Rimane da studiare il carattere della serie per $x = 1$ e per $x = 3$.

Per $x = 1$ la serie è $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, che è una serie a segni alterni. Per $\alpha > 0$ la successione $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ è a termini positivi, è monotona decrescente e ha limite uguale a 0; dunque la serie converge per il criterio di Leibniz [lezione 34, pag. 360]. Per $\alpha = 0$ la serie è $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ ed è quindi irregolare.

Per $x = 3$ la serie è $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, che è una serie armonica generalizzata. Essa converge se e solo se $\alpha > 1$.

Concludiamo che l'insieme di convergenza della serie è

$$\begin{cases}]1, 3[& \text{se } \alpha = 0, \\ [1, 3[& \text{se } 0 < \alpha \leq 1, \\ [1, 3] & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

b5) Verificate che l'equazione $4^x = -x^2 + 2$ ammette una ed una sola soluzione nell'intervallo $[0, 1]$. Determinate un intervallo $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [0, 1]$ che contiene tale soluzione e che sia di ampiezza $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$.

Soluzione.

Osserviamo che ogni soluzione dell'equazione $4^x = -x^2+2$ è uno zero della funzione $f(x) = 4^x+x^2-2$ e viceversa. La funzione f è continua sull'intervallo $[0, 1]$, poiché è somma di funzioni elementari continue. Inoltre assume valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo: $f(0) = 4^0 - 2 = -1$ e $f(1) = 4^1 + 1 - 2 = 3$. Dal teorema di esistenza degli zeri [lezione 22, pag. 247] segue che esiste almeno uno zero di f su $]0, 1[$. Esso è unico, poiché f è strettamente crescente su $[0, 1]$: infatti f è somma delle due funzioni 4^x e $x^2 - 2$ che sono strettamente crescenti sull'intervallo $[0, 1]$. La stretta crescenza di f può anche essere dedotta dal fatto che la sua derivata $f'(x) = 4^x \log 4 + 2x$ è positiva su $[0, 1]$. Perciò l'equazione $4^x = -x^2 + 2$ ammette una ed una sola soluzione nell'intervallo $[0, 1]$.

Per determinare un intervallo $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [0, 1]$ di ampiezza $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$ contenente la soluzione dell'equazione usiamo il metodo di bisezione [lezione 23, pag. 248]. Nel punto medio $\frac{1}{2}$ di $[0, 1]$ la funzione f assume il valore $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{4} + \frac{1}{4} - 2 = \frac{1}{4} > 0$. Quindi la funzione f ha valori di segno opposto agli estremi dell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$. Dal teorema di esistenza degli zeri segue che lo zero di f appartiene all'intervallo $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. Nel punto medio $\frac{1}{4}$ di $[0, \frac{1}{2}]$ la funzione assume il valore $f(\frac{1}{4}) = \sqrt[4]{4} + \frac{1}{16} - 2 = \sqrt{2} - \frac{31}{16} < 0$. Usando nuovamente il teorema di esistenza degli zeri otteniamo che lo zero di f appartiene all'intervallo $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[$. Ponendo $\tilde{a} = \frac{1}{4}$ e $\tilde{b} = \frac{1}{2}$ otteniamo l'intervallo $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ richiesto.

b6) i) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *derivabile in* $x_0 \in \mathbb{R}$, se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del criterio del confronto asintotico per serie a termini positivi.

Soluzione.

(i) La funzione f si dice derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ se il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

esiste ed è finito [lezione 24, pag. 261].

(ii) Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni a termini positivi per le quali il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ esiste ed è finito e positivo. Allora $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ hanno lo stesso carattere, cioè o entrambe convergono o entrambe divergono positivamente.

Dimostrazione: vedi [lezione 33, pag. 351].

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

Prova scritta di Analisi Matematica 1
A.A. 2019–2020 — Trento, 9 gennaio 2020

Svolgimento prima parte

a1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : -x - \frac{1}{2x} > 0\}$. Dite se A è

i) limitato solo inferiormente;
ii) limitato solo superiormente;
iii) limitato.

Soluzione.
Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}$ il numeratore $2x^2 + 1$ è positivo, abbiamo

$$-x - \frac{1}{2x} > 0 \iff x + \frac{1}{2x} < 0 \iff \frac{2x^2+1}{2x} < 0 \iff 2x < 0 \iff x < 0.$$

Perciò abbiamo $A = \{x \in \mathbb{R} : -x - \frac{1}{2x} > 0\} = \,]-\infty, 0[$ e quindi vale (ii).

a2) Sia $A = \{x_n = (-1)^n \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$. Determinate $\min A$ e $\max A$.

Soluzione.
Poiché il segno di $(-1)^n$ dipende dalla parità di n, consideriamo separatamente la successione $\{x_{2n}\}_{n\geq 1}$ e la successione $\{x_{2n+1}\}_{n\geq 0}$. La successione $\{x_{2n}\}_{n\geq 1}$ è a termini positivi e decrescente, mentre la successione $\{x_{2n+1}\}_{n\geq 0}$ è a termini negativi e crescente. Perciò, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, abbiamo $x_1 \leq x_n \leq x_2$. Abbiamo quindi $\min A = x_1 = -1$ e $\max A = x_2 = \frac{1}{4}$.

a3) Sia $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$. Determinate z^4.

Soluzione.
Osserviamo che la parte reale e la parte immaginaria di z sono uguali e quindi l'argomento di z è $\frac{\pi}{4}$. Inoltre il valore assoluto di z è 1. Perciò il numero complesso z scritto in forma trigonometrica è

$$z = \cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}.$$

Ora usando la formula di de Moivre [lezione 9, pag. 93] abbiamo

$$z^4 = \cos(4 \cdot \frac{\pi}{4}) + i \sin(4 \cdot \frac{\pi}{4}) = \cos\pi + i \sin\pi = -1.$$

a4) Determinate il dominio della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\log(x-1)}$.

Soluzione.
Ricordiamo che la funzione logaritmo è definita sull'insieme dei numeri reali positivi e si annulla in 1. Perciò il dominio di f è

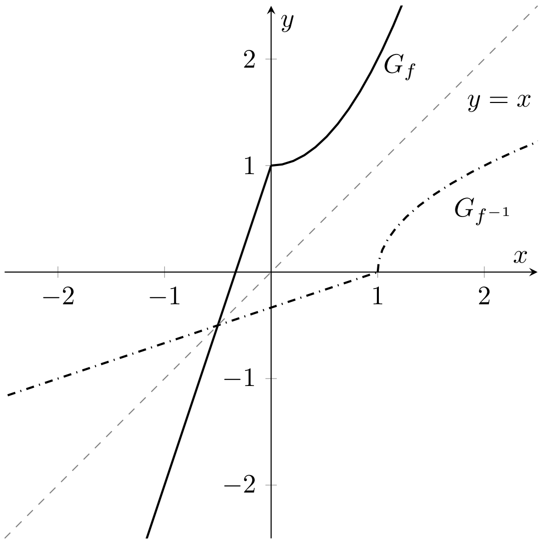
$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 > 0,\ x - 1 \neq 1\} = \,]1, +\infty[\setminus \{2\}.$$

a5) Sia $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{se } x<0 \\ x^2+1 & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$ Rappresentate graficamente la funzione inversa f^{-1}.

Soluzione.

La rappresentazione grafica di f^{-1} è data dalla rappresentazione del suo grafico $G_{f^{-1}}$. Riflettendo il grafico G_f di f rispetto alla retta di equazione $y = x$, otteniamo $G_{f^{-1}}$. Vale infatti

$$(x, y) \in G_f \iff (y, x) \in G_{f^{-1}}.$$



a6) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Determinate la funzione composta $(g \circ f)(x)$.

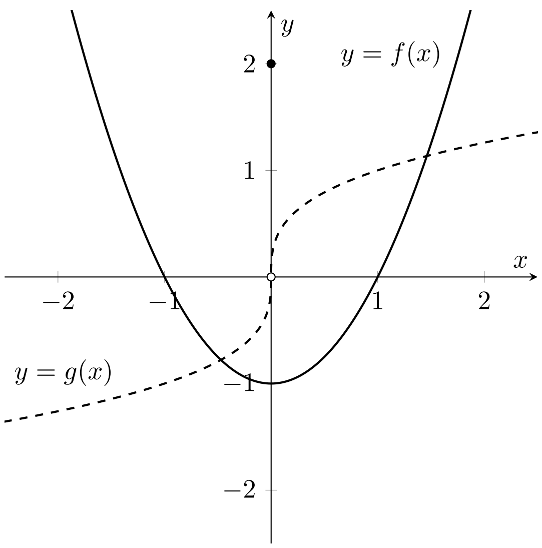
Soluzione.

Osserviamo che $g \circ f$ è definita su $\mathbb{R}$, poiché sia f sia g sono definite su $\mathbb{R}$. Dalla definizione di funzione composta e da quella di g segue

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} \sqrt[3]{f(x)} & \text{se } f(x) \neq 0 \\ 2 & \text{se } f(x) = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che f si annulla in -1 e 1. Quindi la funzione composta $(g \circ f)$ è data da

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 - 1} & \text{se } x \notin \{-1, 1\} \\ 2 & \text{se } x = -1 \text{ oppure } x = 1. \end{cases}$$



a7) Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 3, centrato in $x_0 = 0$, della funzione $f(x) = e^{2x} - \sin x$.

Soluzione.

Il polinomio di Taylor di ordine 3 di e^{2x} centrato in 0 si ottiene sostituendo $2x$ a t nel polinomio di Taylor di ordine 3 di e^t centrato in 0, che è $1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3$. Ricordando che il polinomio di Taylor di ordine 3 di $\sin x$ centrato in 0 è $x - \frac{1}{3!}x^3$, otteniamo che il polinomio di Taylor $P_3(x)$ di ordine 3 di $e^{2x} - \sin x$ centrato in 0 è

$$P_3(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{6}(2x)^3 - (x - \frac{1}{6}x^3) = 1 + x + 2x^2 + \frac{3}{2}x^3.$$

a8) Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{2t^2}\,dt$. Determinate la sua monotonia.

Soluzione.

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale [lezione 37, pag. 388] segue che la funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{2t^2}\,dt$ è derivabile e vale $F'(x) = e^{2x^2}$. Perciò F' è positiva su $\mathbb{R}$ e quindi F è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

a9) Determinate gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{(1-x^2)n}$ risulta convergente.

Soluzione.

La serie è la serie geometrica a termini positivi $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(q(x))^n$ con $q(x) = e^{1-x^2}$. Perciò la serie converge se e solo se si ha $e^{1-x^2} < 1$. Poiché abbiamo

$$e^{1-x^2} < 1 \iff e^{1-x^2} < e^0 \underset{(*)}{\iff} 1 - x^2 < 0 \iff x < -1 \text{ oppure } x > 1,$$

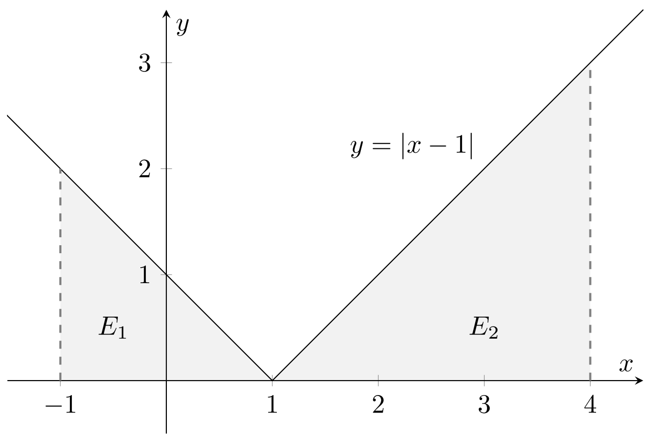
dove in $(*)$ abbiamo usato il fatto che la funzione e^x è strettamente crescente, la serie converge se e solo se si ha $x \in \left]-\infty, -1\right[\,\cup\, \left]1, +\infty\right[$.

a10) Determinate $\displaystyle\int_{-1}^{4} |x-1|\,dx$.

Soluzione.

Usando l'interpretazione geometrica dell'integrale di una funzione non negativa come area del suo sottografico, abbiamo

$$\int_{-1}^{4} |x-1|\,dx = \text{area}(E_1) + \text{area}(E_2) = \frac{2\cdot 2}{2} + \frac{3\cdot 3}{2} = \frac{13}{2}.$$



Svolgimento seconda parte

b1) i) Determinate in forma algebrica le soluzioni dell'equazione $z^2 = -2i$ e rappresentatele nel piano di Gauss.

ii) Determinate le soluzioni $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ del sistema $\begin{cases} (z^2 + 2i)(z-1) = 0 \\ w\overline{z} - i = 0 \end{cases}$ esprimendole in forma algebrica.

iii) Verificate che le soluzioni (z, w) ottenute al punto (ii) soddisfino $|zw| = 1$. Questo fatto si può dedurre facilmente dal sistema di cui sono soluzioni?

Soluzione.

(i) Le soluzioni dell'equazione $z^2 = -2i$ sono le due radici quadrate del numero complesso $-2i$, la cui forma trigonometrica è

$$2\left(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\right).$$

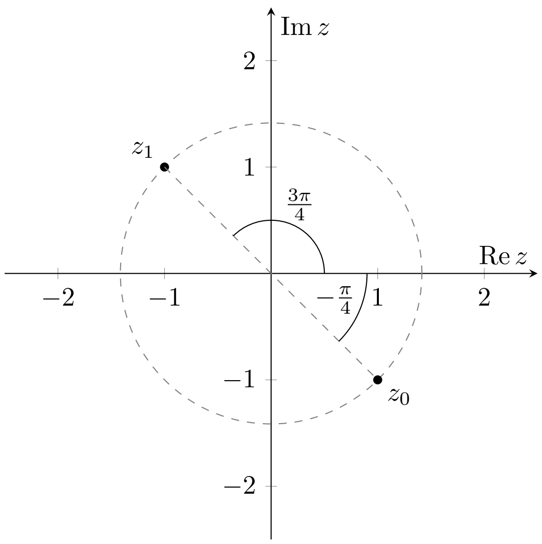
Dalla formula delle radici n-esime di un numero complesso otteniamo i due numeri

$$z_k = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi/2 + k \cdot 2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi/2 + k \cdot 2\pi}{2}\right)\right), \quad k = 0, 1,$$

cioè

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + i.$$



(ii) Osserviamo che la prima equazione del sistema, ossia $(z^2 + 2i)(z - 1) = 0$, ha tre soluzioni complesse: le due radici quadrate di $-2i$, cioè i numeri $1 - i$ e $-1 + i$ che abbiamo trovato in (i), e 1. Dalla seconda equazione del sistema, cioè $w\overline{z} - i = 0$, ricaviamo $w = \frac{i}{\overline{z}}$. Sostituendo a z ciascuna delle tre soluzioni della prima equazione del sistema, otteniamo

$$w = \begin{cases} \dfrac{i}{\overline{(1-i)}} = \dfrac{i}{1+i} = \dfrac{i(1-i)}{2} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2} & \text{se } z = 1 - i \\[2ex] \dfrac{i}{\overline{(-1+i)}} = \dfrac{i}{-1-i} = \dfrac{i(-1+i)}{2} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2} & \text{se } z = -1 + i \\[2ex] \dfrac{i}{\overline{1}} = i & \text{se } z = 1. \end{cases}$$

Perciò le coppie $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ che sono soluzioni del sistema sono

$$(z_1, w_1) = \left(1 - i, \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right), \quad (z_2, w_2) = \left(-1 + i, -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right), \quad (z_3, w_3) = (1, i) .$$

(iii) Abbiamo

$$\begin{aligned}
|z_1 w_1| &= \left|(1 - i)\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{2} + \cancel{i\frac{1}{2}} - \cancel{i\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\right| = 1 \\
|z_2 w_2| &= \left|(-1 + i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{2} + \cancel{i\frac{1}{2}} - \cancel{i\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\right| = 1 \\
|z_3 w_3| &= |1 \cdot i| = 1.
\end{aligned}$$

Il fatto che le soluzioni (z, w) ottenute al punto (ii) soddisfano $|zw| = 1$ segue anche dalla seconda equazione del sistema, cioè $w\overline{z} - i = 0$. Infatti, usando l'uguaglianza $w\overline{z} = i$, otteniamo

$$|zw| = |z||w| = |z||\overline{w}| = |z\overline{w}| = |i| = 1.$$

b2) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, non-derivabilià, punti critici e loro natura) della funzione $f(x) = x - |x| + \dfrac{1}{2(x+1)}$. Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.

ii) Determinate l'area della regione del piano E compresa tra il grafico della funzione $f(x)$ con $x \in [-\frac{1}{2}, 0]$ e l'asse delle ascisse.

iii) Tracciate un grafico qualitativo della funzione $g(x) = \arctan(f(x))$.

Soluzione.

Dominio. La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $2(x + 1)$ non si annulli. Abbiamo quindi

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = \,]-\infty, -1[\; \cup \;]-1, +\infty[\,.$$

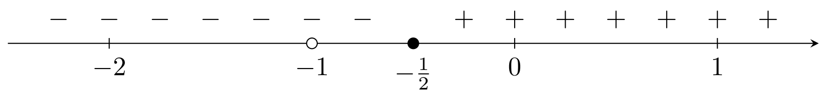
Segno. Usando la definizione di valore assoluto abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} x - (-x) + \dfrac{1}{2(x+1)} = \dfrac{4x^2 + 4x + 1}{2(x+1)} = \dfrac{(2x+1)^2}{2(x+1)} & \text{se } x < 0, x \neq -1 \\ \cancel{x} - \cancel{x} + \dfrac{1}{2(x+1)} = \dfrac{1}{2(x+1)} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Abbiamo

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{se } x < -1 \\ f(x) = 0 & \text{se } x = -\frac{1}{2} \\ f(x) > 0 & \text{se } \; -1 < x < -\frac{1}{2} \text{ oppure } x > -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Rappresentiamo il segno di f.



Comportamento agli estremi del dominio. Gli estremi del dominio sono $-\infty$, -1 e $+\infty$.

Abbiamo $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x + \frac{1}{2(x+1)}) = -\infty$. Poiché vale $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2(x+1)} = 0$, la retta di equazione $y = 2x$ è un asintoto obliquo di f per $x \to -\infty$.

Abbiamo $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e quindi $y = 0$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to +\infty$.

Abbiamo $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$. Quindi $x = -1$ è un asintoto verticale (da sinistra) di f.

Abbiamo $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$. Quindi $x = -1$ è un asintoto verticale (da destra) di f.

Continuità e derivabilità. La funzione è continua nel suo dominio perché può essere ottenuta con somme e rapporti di funzioni continue.

La funzione è sicuramente derivabile per $x \in \operatorname{dom} f \setminus \{0\}$ può essere ottenuta con somme e rapporti di funzioni derivabili. Abbiamo quindi

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{1}{2(x+1)^2} = \dfrac{4(x+1)^2 - 1}{2(x+1)^2} = \dfrac{4x^2 + 8x + 3}{2(x+1)^2} & \text{se } x < 0,\ x \neq -1 \\ -\dfrac{1}{2(x+1)^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Per studiare la derivabilità di f in $x = 0$ studiamo i limiti di $f'(x)$ per $x \to 0$ da sinistra e da destra:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x^2 + 8x + 3}{2(x+1)^2} = \frac{3}{2}$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2(x+1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Essendo f continua in $x = 0$ dal corollario del teorema di de l'Hôpital [lezione 29, pag. 316] segue che esistono la derivata sinistra di f e la derivata destra di f nel punto $x = 0$ e vale

$$f'_-(0) = \frac{3}{2} \qquad f'_+(0) = -\frac{1}{2}.$$

Poiché i due limiti non coincidono risulta che f non è derivabile in $x = 0$ e il dominio di f' è $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. In particolare il punto $(0, f(0)) = (0, \frac{1}{2})$ del grafico di f è un punto angoloso.

Punti critici e loro natura: Osserviamo che la derivata $f'(x)$ non si annulla su $]0, +\infty[$. Cerchiamo quindi eventuali punti critici di f nell'insieme $]-\infty, 0[\setminus \{-1\}$ risolvendo l'equazione

$$\frac{4x^2 + 8x + 3}{2(x+1)^2} = 0.$$

Abbiamo

$$4x^2 + 8x + 3 = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \text{ oppure } x = -\frac{3}{2}.$$

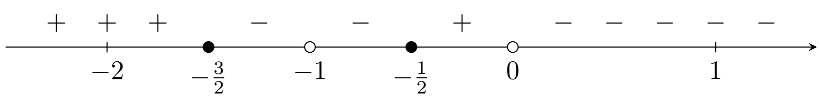
Poiché sia $-\frac{3}{2}$ sia $-\frac{1}{2}$ appartengono all'insieme $]-\infty, 0[\setminus \{-1\}$, entrambi sono punti critici di f e abbiamo

$$f(-\frac{1}{2}) = 0 \qquad f(-\frac{3}{2}) = -4.$$

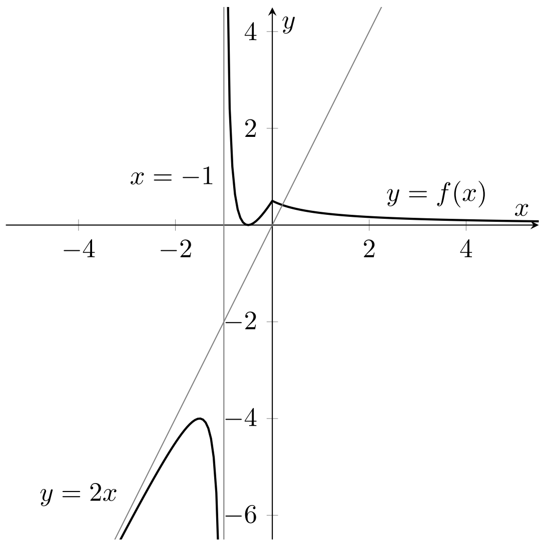
Studio del segno di f'. Nell'intervallo $]0, +\infty[$ la derivata di f è data da $f'(x) = -\frac{1}{2(x+1)^2}$ e quindi è negativa.

Nell'insieme $]-\infty, 0[\setminus \{-1\}$ la derivata di f è data da $f'(x) = \frac{4x^2+8x+3}{2(x+1)^2}$, il cui segno coincide con quello di $4x^2 + 8x + 3$. Pertanto è positiva per $x < -\frac{3}{2}$ oppure per $x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$, nulla in $-\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$, e negativa per $x \in \left]-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right[\setminus \{-1\}$. Quindi riassumendo abbiamo

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{se } x > 0 \text{ oppure } x \in \left]-\frac{3}{2}, -1\right[\text{ oppure } x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[, \\ f'(x) = 0 & \text{se } x = -\frac{3}{2} \text{ oppure } x = -\frac{1}{2}, \\ f'(x) > 0 & \text{se } x < -\frac{3}{2} \text{ oppure } x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[. \end{cases}$$

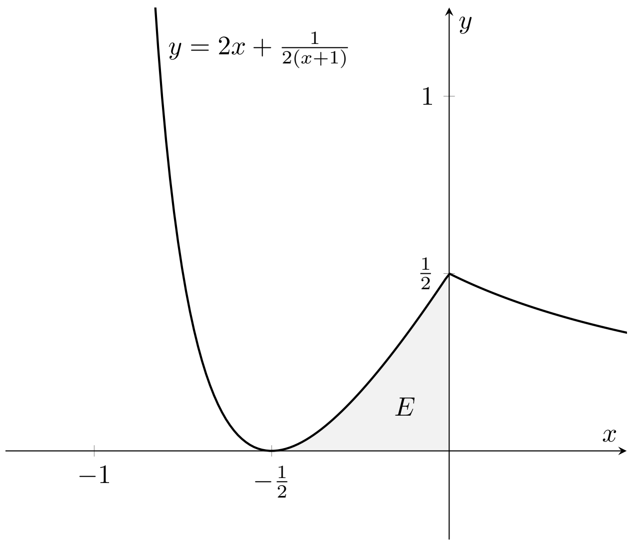


Dal segno della derivata si può dedurre che $x = -\frac{3}{2}$ è un punto di massimo locale stretto e $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di minimo locale stretto. Poiché f è continua in $x = 0$, il punto $x = 0$ è un punto di massimo locale stretto.



(ii) L'area E è data dall'integrale

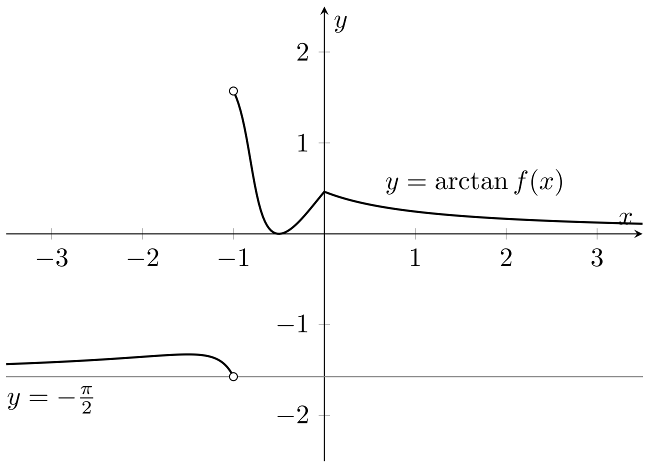
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(2x + \frac{1}{2(x+1)}\right)\, dx = \left[x^2 + \frac{1}{2}\log(|x+1|)\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} + \log\left(\sqrt{2}\right).$$



(iii) Dal segno della funzione $\arctan x$ segue che il segno di $\arctan(f(x))$ è uguale al segno di $f(x)$. Essendo $\arctan x$ strettamente crescente, la funzione $\arctan(f(x))$ ha la stessa monotonia di $f(x)$. Poiché abbiamo $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$, otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(f(x)) = \lim_{x\to-1^-} \arctan(f(x)) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-1^+} \arctan(f(x)) = \frac{\pi}{2}.$$

Poiché $\arctan x$ è continua in 0 e vale $\arctan 0 = 0$, otteniamo $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(f(x)) = 0$.



b3) i) Calcolate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ il limite $\lim\limits_{n\to+\infty}(4n^3 + \log n)\sin\left(\dfrac{1}{2n^3 + \alpha n^\alpha}\right)$.

ii) Studiate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(4n^3 + \log n)\sin\left(\frac{1}{2n^3 + \alpha n^\alpha}\right)$.

Soluzione.

Osserviamo che per ogni $\alpha \geq 0$ l'espressione $\frac{1}{2n^3+\alpha n^\alpha}$ è un infinitesimo per $n \to +\infty$. Inoltre, ricordiamo che per $t \to 0$ abbiamo lo sviluppo $\sin t = t + o(t)$. Allora per $n \to +\infty$ abbiamo

$$\sin\left(\frac{1}{2n^3 + \alpha n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{2n^3 + \alpha n^\alpha}.$$

Inoltre per la gerarchia degli infiniti [lezione 24, pag. 208] per $n \to +\infty$ abbiamo $\log n = o(n^3)$. Quindi per $n \to +\infty$ abbiamo

$$a_n = (4n^3 + \log n)\sin\left(\frac{1}{2n^3 + \alpha n^\alpha}\right) \sim \frac{4n^3 + \log n}{2n^3 + \alpha n^\alpha} \sim \frac{4n^3}{2n^3 + \alpha n^\alpha}.$$

Dunque abbiamo

$$a_n \sim \frac{4n^3}{2n^3 + \alpha n^\alpha} \sim \begin{cases} \dfrac{4n^3}{2n^3} & \text{se } 0 \leq \alpha < 3 \\[2ex] \dfrac{4n^3}{5n^3} & \text{se } \alpha = 3 \\[2ex] \dfrac{4n^3}{\alpha n^\alpha} & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

e quindi otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty}(4n^3 + \log n)\sin\left(\frac{1}{2n^3 + \alpha n^\alpha}\right) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq \alpha < 3 \\ \dfrac{4}{5} & \text{se } \alpha = 3 \\ 0 & \text{se } \alpha > 3. \end{cases}$$

(ii) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, osserviamo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(4n^3 + \log n)\sin\left(\frac{1}{2n^3 + \alpha n^\alpha}\right)$ è una serie, il cui termine generale a_n è positivo. Notiamo che la condizione necessaria per la convergenza di una serie, ossia $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, viene soddisfatta dalla serie data se e solo se $\alpha > 3$. Inoltre per $n \to +\infty$ abbiamo $a_n \sim \frac{4n^3}{\alpha n^\alpha} = \frac{4}{\alpha n^{\alpha-3}}$, che è il termine generale di una serie armonica generalizzata convergente se e solo se $\alpha - 3 > 1$. Quindi, per il criterio del confronto asintotico [lezione 33, pag. 350], la serie data converge se e solo se $\alpha > 4$; altrimenti diverge positivamente.

b4) Studiate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, la convergenza dell'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x^\alpha}{x^2 \log(1+\sqrt[4]{x})}\,dx$.

Soluzione.

Osserviamo che la funzione integranda $f(x) = \dfrac{\arctan 2x^\alpha}{x^2 \log(1+\sqrt[4]{x})}$ è positiva e continua sull'intervallo di integrazione $]0,+\infty[$. Per studiare la convergenza dell'integrale improprio è sufficiente quindi studiare il comportamento asintotico di $f(x)$ agli estremi dell'intervallo. Ricordando gli sviluppi

$$\arctan t = t + o(t), \qquad \log(1+t) = t + o(t) \qquad \text{per } t \to 0$$

e il fatto che per $x \to 0^+$ le funzioni $\sqrt[4]{x}$ e $2x^\alpha$ sono infinitesime, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{2x^\alpha}{x^2 \sqrt[4]{x}} = \frac{2}{x^{2+\frac{1}{4}-\alpha}} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Spezziamo quindi l'integrale sui due intervalli $]0,1]$ e $[1,+\infty[$. L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{9}{4}-\alpha}}dx$ è convergente se e solo se $\frac{9}{4}-\alpha < 1$, cioè per $\alpha > \frac{5}{4}$ [lezione 39, pag. 412]. Per il criterio del confronto asintotico [lezione 40, pag. 423] risulta quindi che $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ è convergente se e solo se $\alpha > \frac{5}{4}$.

Per $x \geq 1$ osserviamo che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo $0 < f(x) < \frac{\frac{\pi}{2}}{x^2 \log 2}$. Poiché vale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} < +\infty$ [lezione 40, pag. 418], per il criterio del confronto asintotico l'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)$ è convergente. In definitiva, l'integrale improprio proposto è convergente se e solo se $\alpha > \frac{5}{4}$.

b5) Determinate la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = -\dfrac{1}{x}y + \sin x \\ y(\pi) = 2. \end{cases}$

Soluzione.

L'equazione differenziale proposta è lineare di primo ordine della forma

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

dove $a(x) = -1/x$ e $b(x) = \sin x$. Dovendo risolvere il problema di Cauchy con $x_0 = \pi$, consideriamo le funzioni a e b sul più grande intervallo di $\mathbb{R}$ che contiene x_0 e su cui sono definite e continue, cioè sull'intervallo $]0,+\infty[$. Ricordando la formula risolutiva [lezione 42, pag. 451], tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sull'intervallo $]0,+\infty[$ sono della forma

$$y(x) = e^{A(x)}\left(c + \int b(x)\cdot e^{-A(x)}dx\right),$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ e c è un numero reale arbitrario. Poiché abbiamo

$$A(x) = \int a(x)dx = -\int \frac{1}{x}dx = -\log x,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\log x}\left(c + \int \sin x \cdot e^{\log x}dx\right) \\ &= \frac{1}{x}(c + \int x\sin x\,dx) \\ &= \frac{1}{x}(c - x\cos x + \int \cos x\,dx) \qquad \text{(integrazione per parti)} \\ &= \frac{1}{x}(c - x\cos x + \sin x). \end{aligned}$$

Ora, imponendo $y(\pi) = 2$, si ottiene $2 = \frac{1}{\pi}(c + \pi)$ e quindi $c = \pi$. In definitiva, la soluzione del problema di Cauchy dato è

$$y(x) = \frac{\pi}{x} - \cos x + \frac{\sin x}{x}, \quad x \in \,]0, +\infty[\,.$$

b6) i) La funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *primitiva* di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Rolle.

Soluzione.

(i) La funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *primitiva* di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se F è derivabile e per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $F'(x) = f(x)$.

(ii) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$. Se vale $f(a) = f(b)$, allora esiste $c \in \,]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione: vedi [lezione 27, pag. 289].

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione

CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

Prova scritta di Analisi Matematica 1

A.A. 2019–2020 — Trento, 30 gennaio 2020

Svolgimento prima parte

a1) Siano $A = [-2, 3[$ e $B =]-\infty, 1[$. Determinate $\inf(A \setminus B)$.

Soluzione.

Ricordiamo che l'insieme differenza $A \setminus B$ è costituito dagli elementi di A che non appartengono a B, in simboli $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$. Quindi abbiamo

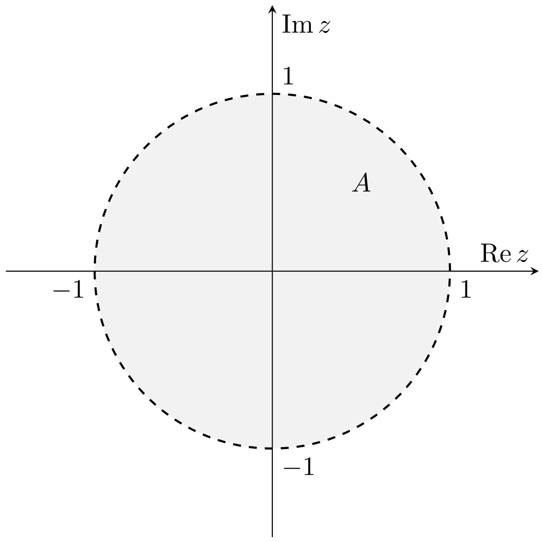
$$A \setminus B = \{x \in [-2, 3[\, : x \geq 1\} = [1, 3[\,.$$

L'estremo inferiore dell'intervallo $[1, 3[$ è 1 e quindi abbiamo $\inf(A \setminus B) = 1$.

a2) Rappresentate graficamente nel piano complesso l'insieme $A = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} < 1\}$.

Soluzione.

Osserviamo che per ogni numero complesso z vale l'uguaglianza $z\overline{z} = |z|^2$, dove $|z|$ è il modulo di z, cioè la distanza di z da 0. Perciò l'insieme A è l'insieme dei numeri complessi z tali che $|z|^2 < 1$ o equivalentemente $|z| < 1$. Quindi nel piano di Gauss A è l'interno del disco di raggio 1 (area in grigio) centrato in 0.

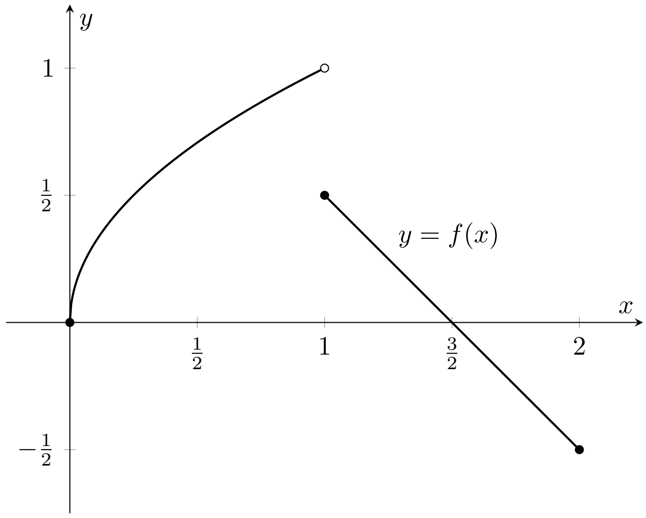


a3) Sia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \in [0, 1[\\ -x + \frac{3}{2} & \text{se } x \in [1, 2]. \end{cases}$

Determinate l'immagine di f.

Soluzione.

Rappresentiamo il grafico di f.



Proiettando il grafico di f sull'asse delle y otteniamo che l'immagine di f è $f([0,2]) = \left[-\frac{1}{2}, 1\right[$.

a4) Determinate tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)$ risulta finito.

Soluzione.

Poiché $\frac{1}{n}$ tende a zero per $n \to +\infty$, usando lo sviluppo di Taylor $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^3)$ per $t \to 0$ con $\frac{1}{n}$ al posto di t, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left(\frac{1}{3!\,n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n^3}\left(\frac{1}{3!} + o(1)\right).$$

Osserviamo che vale $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3!} + o(1)\right) = \frac{1}{6}$. Per l'algebra dei limiti, il limite richiesto esiste ed è finito se e solo se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{n^3}$ esiste ed è finito, cioè per $\alpha \le 3$.

a5) Determinate le equazioni degli asintoti della funzione $f(x) = \dfrac{2}{x+3} + 1$.

Soluzione.

Per individuare eventuali asintoti di f studiamo il comportamento di f agli estremi del suo dominio, che è $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Poiché abbiamo

$$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{x\to-3^-}\frac{2}{x+3} + 1 = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-3^+} f(x) = \lim_{x\to-3^+}\frac{2}{x+3} + 1 = +\infty,$$

la retta di equazione $x = -3$ è un asintoto verticale di f da sinistra e da destra. Inoltre abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x+3} + 1 = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x+3} + 1 = 1.$$

Perciò la retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale di f per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$.

a6) Sia $f(x) = 2e^x + \arctan x$. Determinate l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa f^{-1} nel punto $(2, 0)$.

Soluzione.

Calcoliamo la derivata prima f' di f:

$$f'(x) = 2e^x + \frac{1}{1+x^2}.$$

Applicando il teorema della derivata della funzione inversa [lezione 25, pag. 277] nel punto $x = 2$ e usando $f^{-1}(2) = 0$, otteniamo

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}.$$

Perciò l'equazione della retta tangente al grafico di f^{-1} in $(2,0)$ ha pendenza $\frac{1}{3}$ e la sua equazione è $y = \frac{1}{3}(x-2)$.

a7) Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \int_0^x \cos t\, dt}{x^3}$.

Soluzione.

Osserviamo che il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Cerchiamo di applicare il teorema di de l'Hôpital [lezione 28, pag. 310]. Calcoliamo quindi il rapporto tra la derivata del numeratore e quella del denominatore. Poiché dal teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo

$$\left(\int_0^x \cos t\ dt\right)' = \cos x,$$

otteniamo

$$\frac{\left(x - \int_0^x \cos t\ dt\right)'}{(x^3)'} = \frac{1-\cos x}{3x^2}.$$

Usando il limite notevole [lezione 19, pag. 206] $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(x - \int_0^x \cos t\ dt\right)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{1}{6}.$$

Dal teorema di de l'Hôpital [lezione 28, pag. 310] segue che il limite richiesto è uguale $\frac{1}{6}$.
Notiamo che alternativamente usando l'uguaglianza $\int_0^x \cos t\ dt = \sin x$ e lo sviluppo di Taylor del seno per $x \to 0$ otteniamo

$$\frac{x - \int_0^x \cos t\ dt}{x^3} = \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{x - (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))}{x^3} = \frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Perciò il limite proposto è uguale a $\frac{1}{6}$.

a8) Determinate $\displaystyle\int \left(\frac{\log x}{x} - 2x\right) dx$.

Soluzione.

Poiché abbiamo

$$\frac{\log x}{x} = (\log x)' \log x = \left(\frac{(\log x)^2}{2}\right)',$$

otteniamo

$$\int \left(\frac{\log x}{x} - 2x\right) dx = \frac{(\log x)^2}{2} - x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Possiamo alternativamente calcolare una primitiva di $\frac{\log x}{x}$ integrando per parti [lezione 38, pag. 399]. Dall'uguaglianza

$$\int (\log x)' \log x\, dx = (\log x)^2 - \int (\log x)' \log x\, dx$$

segue
$$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \int (\log x)' \log x\,dx = \frac{(\log x)^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$
Un altro modo di calcolare una primitiva è per sostituzione, ad esempio ponendo $t = \log x$.

a9) Determinate gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n}$ risulta convergente.

Soluzione.

La serie data è la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ con coefficienti $a_n = \frac{1}{2n}$. Il limite della successione delle radici n-esime dei coefficienti è
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n}} = 1,$$
dove l'ultima uguaglianza segue dal limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Dal teorema sul raggio di convergenza per serie di potenze [lezione 35, pag. 370] otteniamo che il raggio di convergenza della serie data è 1. Quindi la serie è convergente per ogni $x \in \left]-1, 1\right[$ e non è convergente per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Rimane da controllare il carattere della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza.

Per $x = -1$ la serie data è la serie a segni alterni $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$. Poiché la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e ha limite 0, per il teorema di Leibniz [lezione 34, pag. 360] la serie è convergente.

Per $x = 1$ la serie data è la serie armonica [lezione 32, pag. 347] $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ ed è quindi divergente.

In definitiva, l'insieme di convergenza della serie data è $\left[-1, 1\right[$.

a10) Determinate i valori degli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin \sqrt[3]{x}}{x^\alpha}\,dx$ risulta finito.

Soluzione.

Osserviamo che la funzione integranda è strettamente positiva e continua sull'intervallo $\left]0, 1\right]$. Studiamo quindi il comportamento della funzione f in un intorno destro di 0. Poiché vale $\sin t \sim t$ per $t \to 0$, ponendo $t = \sqrt[3]{x}$ otteniamo
$$\frac{\sin \sqrt[3]{x}}{x^\alpha} \sim \frac{\sqrt[3]{x}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha - \frac{1}{3}}} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Poiché l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-\frac{1}{3}}}\,dx$ esiste finito se solo se vale $\alpha - \frac{1}{3} < 1$, cioè per $\alpha < \frac{4}{3}$, dal criterio del confronto asintotico l'integrale dato esiste finito se solo se $\alpha < \frac{4}{3}$.

Svolgimento seconda parte

b1) i) Risolvete in $\mathbb{C}$ l'equazione $|w|^2 - w + \overline{w} = 4 - 2i$.

ii) Scrivete le soluzioni in forma trigonometrica e in forma esponenziale, e rappresentatele nel piano di Gauss.

iii) Verificate che sono soluzioni dell'equazione $z^3 = 8i$. Sono le sole soluzioni di quest'equazione?

Soluzione.

(i) Osserviamo che posto $w = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, otteniamo

$$\begin{aligned} |w|^2 - w + \overline{w} = 4 - 2i &\iff x^2 + y^2 - (x + iy) + (x - iy) = 4 - 2i \\ &\iff x^2 + y^2 - 2yi = 4 - 2i \end{aligned}$$

cioè

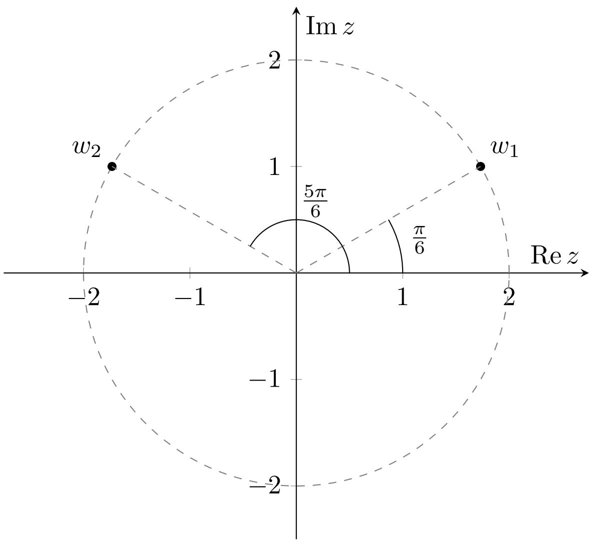
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 1. \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi $w_1 = -\sqrt{3} + i$ e $w_2 = \sqrt{3} + i$.

(ii) Scriviamo in forma trigonometrica e in forma esponenziale le soluzioni w_1 e w_2 dell'equazione ottenute in (i).

$$w_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \qquad w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}};$$

$$w_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right), \qquad w_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$



(iii) Usando la formula di de Moivre [lezione 9, pag. 23] otteniamo

$$w_1^3 = 2^3\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} + i\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\right) = 8i \quad \text{e} \quad w_2^3 = 2^3\left(\underbrace{\cos\frac{5\pi}{2}}_{=0} + i\underbrace{\sin\frac{5\pi}{2}}_{=1}\right) = 8i.$$

Quindi w_1 e w_2 sono soluzioni dell'equazione $z^3 = 8i$. Non sono le sole soluzioni dell'equazione poiché le radici cubiche di un numero complesso non nullo sono 3. Usando la formula per le radici cubiche in $\mathbb{C}$ troviamo che la soluzione mancante è

$$w_3 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i.$$

b2) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità, non-derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione $f(x) = \arctan(x(1-|x|))$. Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.

ii) Determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

iii) Verificate se la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle sull'intervallo $[-1, 1]$.

iv) Calcolate $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

Soluzione.

Dominio. Essendo composizione di funzioni definite su $\mathbb{R}$ la funzione f ha dominio $\mathbb{R}$.

Simmetria. La funzione f è dispari. Infatti, il suo dominio è simmetrico rispetto all'origine e inoltre, usando il fatto che le funzioni arcotangente e valore assoluto sono rispettivamente dispari e pari, otteniamo per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \arctan((-x)(1-|-x|)) = -\arctan(x(1-|x|)) = -f(x).$$

La simmetria ci permette di studiare la funzione ristretta a $[0, +\infty[$.

Segno. Poiché il segno della funzione arcotangente è uguale a quello del suo argomento, studiamo direttamente il segno della funzione $x(1-|x|)$.

		-1		0		1	
segno di x	$-$		$-$	$\bullet$	$+$		$+$
segno di $1-\lvert x\rvert$	$-$	$\bullet$	$+$		$+$	$\bullet$	$-$
segno di $x(1-\lvert x\rvert)$	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$	$\bullet$	$-$

In conclusione, il segno di f è

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{se } -1 < x < 0 \text{ oppure } x > 1 \\ f(x) = 0 & \text{se } x \in \{-1, 0, 1\} \\ f(x) > 0 & \text{se } x < -1 \text{ oppure } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Comportamento agli estremi del dominio e asintoti. Studiamo il limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x - x^2).$$

Grazie all'ordine degli infiniti abbiamo $x - x^2 \to -\infty$ per $x \to +\infty$ e quindi otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x - x^2) = -\frac{\pi}{2}.$$

Quindi la retta di equazione $y = -\frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale per la funzione f per $x \to +\infty$. Per simmetria abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

e la retta di equazione $y = \frac{\pi}{2}$ è un asintoto orizzontale per la funzione f per $x \to -\infty$.

Continuità e derivabilità. Essendo composizione di funzioni continue, la funzione f risulta continua sul suo dominio.

Studiamo la derivabilità di f su $[0, +\infty[$. Per $x > 0$ la funzione è derivabile: infatti, per definizione, la funzione f è composizione di funzioni derivabili. Usando il teorema della derivata di una funzione composta [lezione 25, pag. 276] otteniamo per ogni $x > 0$

$$f'(x) = [\arctan(x - x^2)]' = \frac{1-2x}{1+(x-x^2)^2}.$$

Poiché f è continua in $x = 0$ ed è derivabile in $x > 0$. Dal corollario del teorema di de l'Hôpital [lezione 29, pag. 316] otteniamo

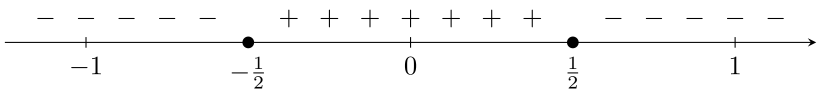
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-2x}{1+(x-x^2)^2} = 1.$$

Essendo f dispari, abbiamo $f'_-(0) = 1$. Perciò f è derivabile anche in $x = 0$ e vale $f'(0) = 1$. In conclusione f è derivabile su $\mathbb{R}$ e abbiamo

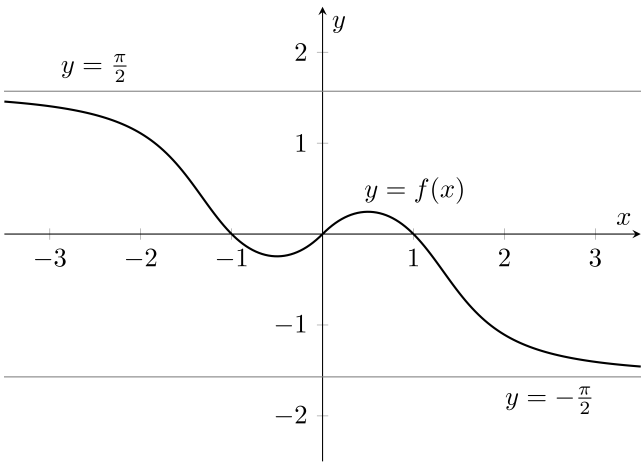
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1+2x}{1+(x+x^2)^2} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1-2x}{1+(x-x^2)^2} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Punti critici. Osserviamo che per $x \geq 0$ l'equazione $f'(x) = 0$ ha un'unica soluzione $x = \frac{1}{2}$. I punti critici di f su $\mathbb{R}$ sono quindi $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

Studiamo il segno di f'. Per $x \geq 0$ il segno di f' è uguale a quello di $1 - 2x$. Inoltre, poiché f è dispari, la sua derivata f' è pari. Rappresentiamo il segno di f'.



Abbiamo quindi che f è decrescente sugli intervalli $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ e $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, e crescente sull'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Perciò $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di minimo locale stretto per f, mentre $x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo locale stretto per f. Nei due punti critici f assume i valori $f(-\frac{1}{2}) = \arctan\left(-\frac{1}{4}\right)$ e $f(\frac{1}{2}) = \arctan\left(\frac{1}{4}\right)$.



(ii) Osserviamo il grafico per determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

Per $k \leq -\frac{\pi}{2}$ o $k \geq \frac{\pi}{2}$ non esistono soluzioni.

Per $-\frac{\pi}{2} < k < -\arctan(\frac{1}{4})$ o $\arctan(\frac{1}{4}) < k < \frac{\pi}{2}$ esiste un'unica soluzione.

Per $k = -\arctan(\frac{1}{4})$ o $k = \arctan(\frac{1}{4})$ esistono due soluzioni.

Per $-\arctan(\frac{1}{4}) < k < \arctan(\frac{1}{4})$ esistono tre soluzioni.

(iii) La funzione f sull'intervallo $[-1, 1]$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle [lezione 26, pag. 287]: la funzione f è continua sull'intervallo $[-1, 1]$, derivabile su $]-1, 1[$ e inoltre vale $f(-1) = f(1) = 0$.

(iv) Ricordiamo che dall'interpretazione geometrica dell'integrale, l'integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico rispetto all'origine è nullo. Poiché f è dispari e l'intervallo d'integrazione $[-1, 1]$ è simmetrico rispetto all'origine si ha

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = 0.$$

b3) Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, e sia $f : [-\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cos x - \log(1+x)}{x^2} & \text{se } x \in [-\frac{1}{2}, 1] \setminus \{0\} \\ \alpha & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinate α tale che $f(x)$ risulti continua su $[-\frac{1}{2}, 1]$.

ii) Per tale valore di α

a) verificate, usando la definizione, che f è derivabile in $x = 0$.

b) stabilite se $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ è un numero reale.

Soluzione.

(i) La funzione è continua su $[-\frac{1}{2}, 1] \setminus \{0\}$ perché è ottenuta componendo, sommando e moltiplicando funzioni continue su $[-\frac{1}{2}, 1] \setminus \{0\}$.

Affinché f sia continua anche in 0, deve esistere finito il limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ e tale limite deve essere uguale ad α. Osserviamo che il limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Usando gli sviluppi di Taylor [lezione 30, pag. 324, 325] per $x \to 0$ delle funzioni $\cos x$ e $\log(1+x)$ otteniamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x \cos x - \log(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2})}{\cancel{x^2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

La funzione f risulta quindi continua in 0 se e solo se $\alpha = \frac{1}{2}$.

(ii) Per $\alpha = \frac{1}{2}$ la funzione f è data da

$$f(x) = \begin{cases} x \cos x - \frac{\log(1+x)}{x^2} & \text{se } x \in [-\frac{1}{2}, 1] \setminus \{0\} \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Ricordando la definizione di derivabilità [lezione 24, pag. 260], la funzione f è derivabile in $x = 0$ se e solo se il limite $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ esiste ed è finito. Per ogni $h \neq 0$ si ha

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{h\cos h - \log(1+h)}{h^2} - \frac{1}{2}}{h} = \frac{2\big(h \cos h - \log(1+h)\big) - h^2}{2h^3}.$$

Usando gli sviluppi di Taylor per $h \to 0$ delle funzioni $\cos h$ e $\log(1+h)$ otteniamo

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\cancel{2h} - \frac{2h^3}{2} + o(h^3) - \cancel{2h} + \cancel{\frac{2h^2}{2}} - \frac{2h^3}{3} + o(h^3) - \cancel{h^2}}{2h^3} = -\frac{5}{6} + \frac{o(h^3)}{h^3}$$

e quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -\frac{5}{6}.$$

La funzione f è dunque derivabile in 0 e si ha $f'(0) = -\frac{5}{6}$.

(b) La funzione f è una funzione continua sull'intervallo chiuso $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. Quindi f è Riemann-integrabile [lezione 36, pag. 381] su questo intervallo ed in particolare sull'intervallo d'integrazione $[0, 1]$. Ciò significa che l'integrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\;dx$ esiste ed è finito.

b4) i) Discutete la convergenza del seguente integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2 + 4x + 3}\,dx.$

ii) Usando la definizione calcolate il suo valore.

Soluzione.

(i) Osserviamo che la funzione integranda è continua e positiva sull'intervallo di integrazione $[0,+\infty[$. Perciò la funzione è integrabile su ogni intervallo limitato della forma $[0,a]$ con $a>0$. Inoltre per confronto abbiamo

$$\int_a^{+\infty} \frac{2}{x^2+4x+3}\,dx < \int_a^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx < +\infty$$

e quindi l'integrale dato è convergente.

(ii) Per definizione dell'integrale improprio su un intervallo illimitato [lezione 39, pag. 415] abbiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2+4x+3}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{2}{(x+3)(x+1)}\,dx.$$

Usando il metodo di integrazione per funzioni razionali [lezione 38, pag. 405], otteniamo

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{2}{x^2+4x+3}\,dx &= \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \frac{2}{(x+3)(x+1)}\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_0^M \Big(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\Big)\,dx \\ &= \lim_{M\to+\infty} \big[\log(x+1)-\log(x+3)\big]_0^M = \lim_{M\to+\infty} \big[\log(\frac{x+1}{x+3})\big]_0^M \\ &= -\log\frac{1}{3} = \log 3.\end{aligned}$$

b5) i) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''-y=6e^{-x} \\ y(0)=1 \\ y'(0)=1. \end{cases}$$

ii) Sia $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Determinate l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''-y=6e^{\alpha x}$.

Soluzione.

(i) Osserviamo che si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea [lezione 43, pag. 457], dove la parte non omogenea è data dalla funzione esponenziale $6e^{-x}$.

Ricordiamo che, data una qualsiasi soluzione particolare $\bar{y}$ dell'equazione differenziale $y''-y=6e^{\alpha x}$, l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale $y''-y=6e^{\alpha x}$ si ottiene dall'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata $y''-y=0$ sommando $\bar{y}$ a ciascuna delle soluzioni dell'omogenea.

Risolviamo l'equazione omogenea $y''-y=0$. L'equazione caratteristica associata [lezione 43, pag. 457] è $z^2-1=0$, che ha soluzioni -1 e 1. Perciò l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea è dato da $y_o(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{x}$, con $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omegenea usiamo il metodo di similarità [lezione 43, pag. 460]. Poiché -1 è soluzione dell'equazione caratteristica cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione differenziale completa $y''-y=6e^{-x}$ della forma $\bar{y}(x)=hxe^{-x}$ con $h\in\mathbb{R}$. Abbiamo $\bar{y}'(x)=he^{-x}-hxe^{-x}$ e $\bar{y}''(x)=-2he^{-x}+hxe^{-x}$. Perciò otteniamo

$$\bar{y}''(x)-\bar{y}(x)=6e^{-x} \iff -2he^{-x}=6e^{-x} \iff h=-3.$$

Quindi $\bar{y}(x)=-3xe^{-x}$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. In conclusione, l'integrale generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x)=y_o(x)+\bar{y}(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{x}-3xe^{-x}, \quad \text{con } c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Affinché siano soddisfatte le condizioni iniziali $y(0)=1$ e $y'(0)=1$, si deve avere

$$\begin{cases} 1=c_1+c_2 \\ 1=-c_1+c_2-3, \end{cases}$$

cioè $c_1 = -\frac{3}{2}$ e $c_2 = \frac{5}{2}$. La soluzione del problema di Cauchy è dunque la funzione su $\mathbb{R}$

$$y(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + \frac{5}{2}e^{x} - 3xe^{-x}.$$

(ii) Notiamo che l'equazione omogenea associata a $y'' - y = 6e^{\alpha x}$ è uguale a quella in (i) e quindi l'integrale generale dell'omogenea è $y_o(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Poiché α non è soluzione dell'equazione caratteristica associata, cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea della forma $\bar{y}(x) = he^{\alpha x}$, con $h \in \mathbb{R}$. Abbiamo $\bar{y}'(x) = \alpha h e^{\alpha x}$ e $\bar{y}''(x) = \alpha^2 h e^{\alpha x}$ e dunque otteniamo

$$\bar{y}''(x) - \bar{y}(x) = 6e^{\alpha x} \iff (\alpha^2 - 1)he^{\alpha x} = 6e^{\alpha x} \iff h = \frac{6}{\alpha^2 - 1}.$$

In conclusione, l'integrale generale dell'equazione differenziale data è

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \frac{6}{\alpha^2 - 1}e^{\alpha x}, \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b6) i) Si scrive che $f(x) = 1 + o(x^3)$ per $x \to 0$ se ...

ii) Scrivete la formula e la dimostrazione del prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica.

Soluzione.

(i) Si scrive che $f(x) = 1 + o(x^3)$ per $x \to 0$ se vale $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x^3} = 0$.

(ii) Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Allora si ha

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \big(\cos(\arg z_1 + \arg z_2) + i \sin(\arg z_1 + \arg z_2)\big).$$

Dimostrazione: vedi [lezione 9, pag. 92].

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

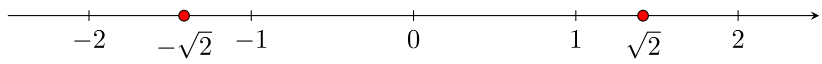
Prova scritta di Analisi Matematica 1
A.A. 2019–2020 — Trento, 25 giugno 2020

Svolgimento prima parte

a1) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| \leq 0\}$. Rappresentate graficamente A e dite se A è un intervallo.

Soluzione.

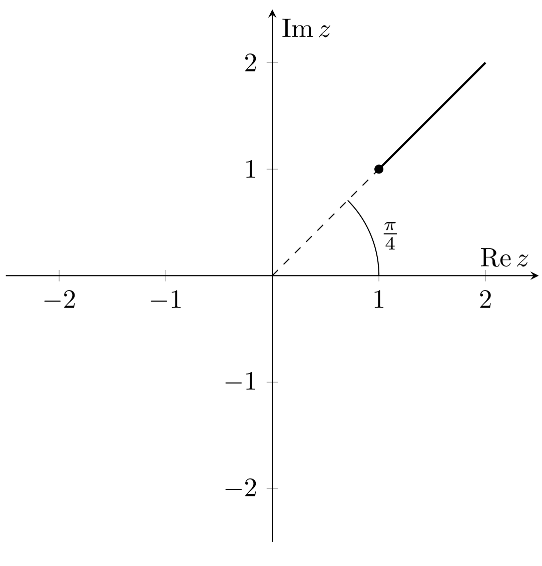
Osserviamo che $|x^2 - 2| \leq 0$ è equivalente a $|x^2 - 2| = 0$ e quindi a $x^2 - 2 = 0$. Le soluzioni di questa equazione sono $x = \pm\sqrt{2}$ e quindi $A = \{-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\}$. A non è un intervallo.



a2) Rappresentate graficamente nel piano complesso gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Im} z \geq 1$ e $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$.

Soluzione.

Nel piano di Gauss i numeri complessi di argomento $\frac{\pi}{4}$ sono i punti che appartengono alla semiretta aperta che è bisettrice del primo quadrante. Evidenziamo, tra questi punti, quelli che hanno parte immaginaria maggiore o uguale a 1.

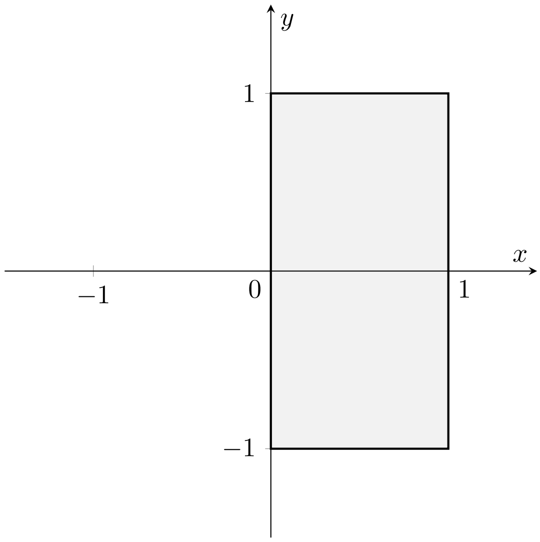


a3) Rappresentate nel piano cartesiano l'insieme $E \times F$, dove $E = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x\}$ e $F = [-1, 1]$.

Soluzione.

L'insieme delle soluzioni della disequazione $x^2 \leq x$ è l'intervallo $[0, 1]$. Abbiamo quindi

$$E \times F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [-1, 1]\} = [0, 1] \times [-1, 1].$$



a4) Risolvete la disequazione $\arcsin(2x-1) \geq 0$.

Soluzione.

La funzione $\arcsin x$ ha dominio $[-1, 1]$ ed è non negativa su $[0, 1]$. Abbiamo quindi

$$\arcsin(2x-1) \geq 0 \iff 0 \leq 2x-1 \leq 1 \iff 1 \leq 2x \leq 2 \iff \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

Perciò l'insieme delle soluzioni della disequazione $\arcsin(2x-1) \geq 0$ è l'intervallo $[\frac{1}{2}, 1]$.

a5) Calcolate $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log n^3}{\log(n^2+1)}$.

Soluzione.

Usando le proprietà del logaritmo otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n^3}{\log(n^2+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n^3}{\log[n^2(1+\frac{1}{n^2})]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\log n}{2\log n + \log(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{3}{2}.$$

a6) Determinate $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $f(x) = x^3 - \alpha x$ abbia un punto critico in $x = 1$.

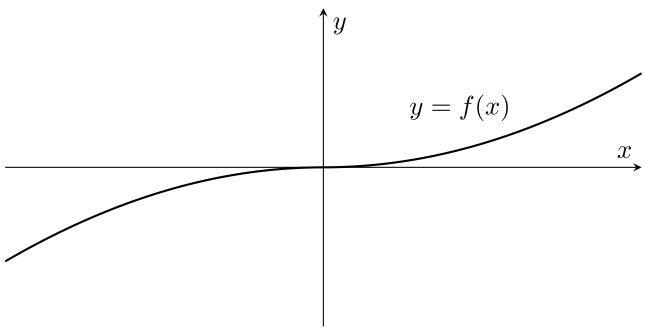
Soluzione.

I punti critici di f sono gli zeri della sua derivata $f'(x) = 3x^2 - \alpha$. Quindi f ha un punto critico in $x = 1$ se e solo se abbiamo $f'(1) = 0$, ossia $\alpha = 3$.

a7) Rappresentate graficamente la funzione $f(x) = |x| \sin x$ in un intorno di $x = 0$.

Soluzione.

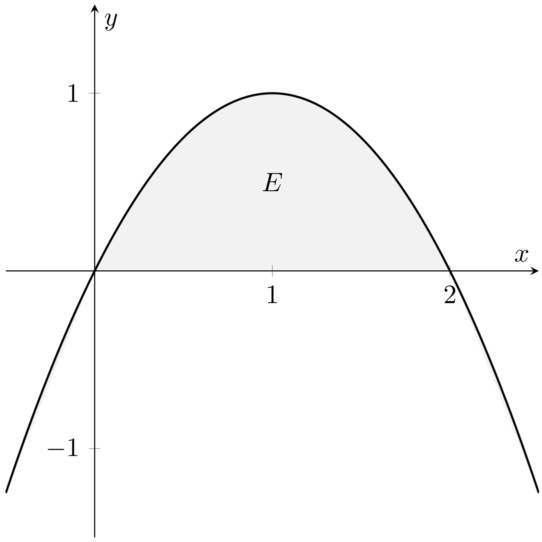
Per rappresentare graficamente f in un intorno di 0 ricordiamo che per $x \to 0$ si ha $\sin x \sim x$ e quindi $f(x) \sim |x|\, x$.



a8) Calcolate l'area della regione limitata E del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = -x^2 + 2x$ e l'asse delle ascisse.

Soluzione.

Il grafico della funzione f è la parabola di equazione $y = -x^2 + 2x$, che ha la concavità rivolta verso il basso e interseca l'asse delle ascisse dei punti 0 e 2.



L'area di E è quindi

$$\text{area}(E) = \int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = \big[-\frac{x^3}{3} + x^2\big]_0^2 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}.$$

a9) Dite se il seguente integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x}\,dx$ risulta convergente o no.

Soluzione.

La funzione integranda $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x}$ definita su $]0,1]$ è continua e positiva. Per $x \to 0$ vale $\sin x \sim x$ e quindi per $x \to 0^+$ otteniamo $f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Per il criterio del confronto asintotico il carattere dell'integrale dato è uguale a quello dell'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

Ricordiamo che l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ risulta convergente per $\alpha < 1$ e diverge positivamente altrimenti [lezione 39, pag. 412]. Quindi l'integrale dato non è convergente.

a10) Calcolate la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-n}$.

Soluzione.

Osserviamo che la serie data è una serie geometrica di ragione $\frac{1}{3}$. Otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Svolgimento seconda parte

b1) Al variare di $a \in \mathbb{R}$ risolvete in $\mathbb{C}$ l'equazione $z\overline{z} - z + ia = 0$.

Soluzione.

Posto $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ otteniamo

$$x^2 + y^2 - (x + iy) + ia = 0,$$

cioè

$$(x^2 - x + y^2) + i(-y + a) = 0.$$

Quest'ultima equazione è equivalente a

$$\begin{cases} x^2 - x + y^2 = 0 \\ y = a \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - x + a^2 = 0 \\ y = a. \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado $x^2 - x + a^2 = 0$ non ha soluzioni reali se $1 - 4a^2 < 0$, ha un'unica soluzione reale se $1 - 4a^2 = 0$ e ne ha due se $1 - 4a^2 > 0$. Quindi l'equazione data

- per $a \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ non ha soluzioni;
- per $a \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ ha un'unica soluzione, $z = \frac{1}{2} + ia$;
- per $a \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ ha due soluzioni, $z_1 = \frac{1-\sqrt{1-4a^2}}{2} + ia$ e $z_2 = \frac{1+\sqrt{1-4a^2}}{2} + ia$.

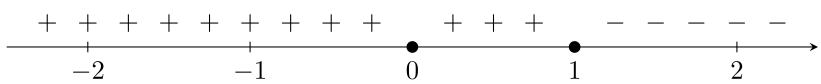
b2) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità/non-derivabilità, punti critici e loro natura, convessità/concavità) della funzione $f(x) = \sqrt{|x|} - x$. Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.

ii) Tracciato un grafico qualitativo della funzione $g(x) = \log(f(x))$ e un grafico qualitativo della funzione $h(x) = e^{f(x)}$.

Soluzione.

(i) **Dominio.** La funzione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi il suo dominio è $\mathbb{R}$.

Segno. Per $x < 0$ la funzione f assume valori positivi e in 0 abbiamo $f(0) = 0$. Per $x > 0$ si ha $f(x) = \sqrt{x} - x$, che si annulla in 1 e assume valori positivi a sinistra di 1 e negativi a destra. Riassumendo il segno di f è il seguente.



Comportamento agli estremi del dominio e asintoti. Il dominio di f è $]-\infty, +\infty[$ e quindi i suoi estremi sono $-\infty$ e $+\infty$. Per $x \to -\infty$ abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{|x|} - x) = +\infty.$$

Usando la gerarchia degli infiniti per $x \to +\infty$ otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{|x|} - x) = -\infty.$$

Perciò f non ha asintoti orizzontali. Ricordiamo che f ammette la retta di equazione $y = ax + b$ come asintoto per $x \to -\infty$ se vale $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$. In questo caso vale

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - ax] = b. \end{cases}$$

Poiché abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{|x|}-x}{x} = -1$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (-1)x] = \lim_{x\to-\infty} [\sqrt{|x|} - x + x] = +\infty,$$

la funzione f non ammette asintoto obliquo per $x \to -\infty$. Analogamente si può verificare che per $x \to +\infty$ la funzione f non ammette asintoto obliquo.

Continuità. La funzione f è continua su $\mathbb{R}$ essendo ottenuta componendo e sommando funzioni continue su $\mathbb{R}$.

Derivabilità. Osserviamo che vale

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} - x & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} - x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Per $x \neq 0$ la funzione f è derivabile, in quanto è ottenuta componendo e sommando funzioni derivabili e si ha

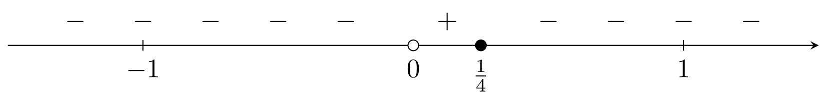
$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} - 1 & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x = 0$ e derivabile per $x \neq 0$, dal corollario del teorema di de l'Hôpital [lezione 29, pag. 316] otteniamo

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} [-\frac{1}{2\sqrt{-x}} - 1] = -\infty$$
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} [\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1] = +\infty.$$

Perciò f non è derivabile in $x = 0$ e $(0, 0)$ è una cuspide per f.

Punti critici e monotonia. Cerchiamo i punti critici di f, cioè i punti in cui si annulla f'. Osserviamo che per $x < 0$ la derivata f' è negativa. Per $x > 0$ l'equazione $f'(x) = 0$, che è equivalente a $1 - 2\sqrt{x} = 0$, ha un'unica soluzione $x = \frac{1}{4}$. Perciò $\frac{1}{4}$ è l'unico punto critico di f e vale $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$. Poiché $\sqrt{x}$ è una funzione strettamente crescente, la funzione $1 - 2\sqrt{x}$ è strettamente decrescente e assume quindi valori positivi sull'intervallo $\left[0, \frac{1}{4}\right[$ e negativi per $x > \frac{1}{4}$. Il segno di f' è dunque il seguente.

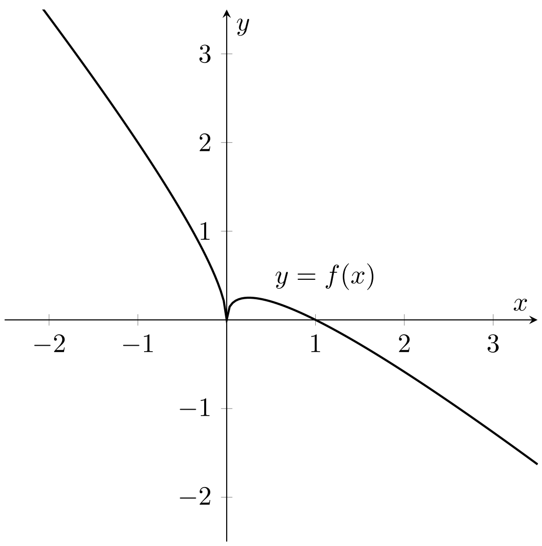


Quindi f è strettamente decrescente sugli intervalli $]-\infty, 0]$ e $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$, mentre f è strettamente crescente sull'intervallo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$. Il punto $x = \frac{1}{4}$ è dunque un punto di massimo locale stretto per f.

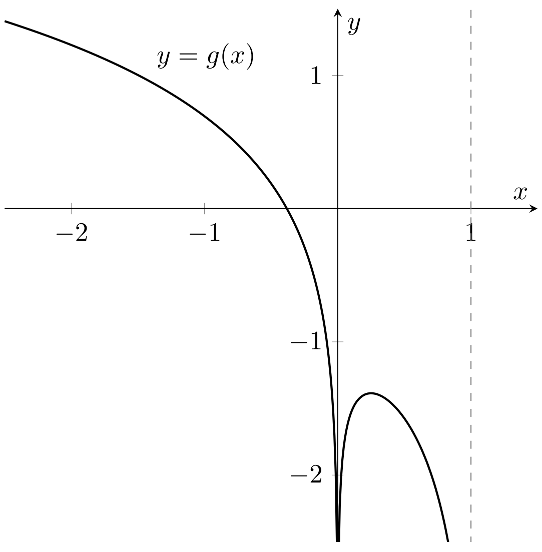
Convessità/concavità. Essendo f' derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4\sqrt{-x^3}} & \text{se } x < 0 \\ -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

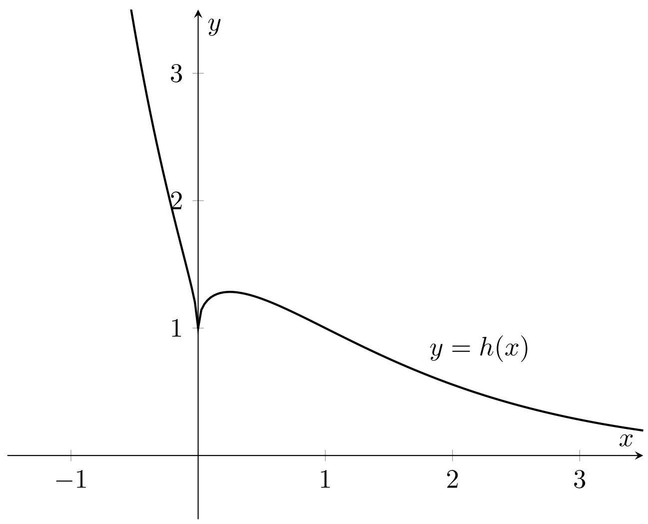
Osserviamo che f'' assume soltanto valori negativi sul suo dominio. Quindi f è concava su ciascuno degli intervalli $]-\infty, 0]$ e $[0, +\infty[$.



(ii) La funzione $\log x$ è definita per $x > 0$ ed è strettamente crescente. Quindi la funzione $g(x) = \log(\sqrt{|x|} - x)$ è definita su $]-\infty, 1[\setminus \{0\}$ e ha la stessa monotonia della funzione $\sqrt{|x|} - x$. Per tracciare un grafico qualitativo della funzione $g(x)$, ricordiamo inoltre $\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty$, $\log 1 = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty$.



La funzione e^x è definita su $\mathbb{R}$ ed è strettamente crescente. Quindi la funzione $h(x) = e^{\sqrt{|x|}-x}$ è definita su $\mathbb{R}$ e ha la stessa monotonia della funzione $\sqrt{|x|} - x$. Per tracciare un grafico qualitativo della funzione $h(x)$, ricordiamo inoltre $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$, $e^0 = 1$ e $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.



b3) Determinate i valori reali di α per i quali

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\arctan\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n} - \frac{\alpha}{6n^2}}{(\sin\frac{1}{\sqrt{n}})^4}$$

esiste finito e diverso da zero.

Soluzione.

Poiché abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} n\arctan\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{n} = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

il limite si presenta nella forma indeterminata $\left[\frac{0}{0}\right]$. Per calcolarlo usiamo gli sviluppi di Taylor. Poiché il denominatore è $(\sin\frac{1}{\sqrt{n}})^4$ e per $n \to +\infty$ abbiamo $(\sin\frac{1}{\sqrt{n}})^4 \sim \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4 = \frac{1}{n^2}$, è sufficiente sviluppare il numeratore fino al secondo ordine. Tenendo conto degli argomenti delle funzioni elementari arcotangente e coseno e del fatto che l'arcotangente è moltiplicata per n, consideriamo per $t \to 0$ gli sviluppi

$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3) \qquad \text{e} \qquad \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Otteniamo quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\arctan\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n} - \frac{\alpha}{6n^2}}{(\sin\frac{1}{\sqrt{n}})^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})\right) - 1 + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - \frac{\alpha}{6n^2}}{\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n^2} - \frac{\alpha}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\frac{1}{6} - \frac{\alpha}{6}) + \frac{o(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}}{1 + \frac{o(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}}.$$

Perciò il limite dato esiste finito e diverso da zero se e solo se si ha $1 - \alpha \neq 0$, cioè per $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b4) i) Discutete la convergenza del seguente integrale improprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-3}}\,dx$.

ii) Usando la definizione calcolate il suo valore.

Soluzione.

(i) Osserviamo che la funzione integranda $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-3}}$ è positiva e continua sull'intervallo di integrazione $]3, +\infty[$. Per studiare la convergenza dell'integrale improprio è sufficiente quindi studiare il comportamento asintotico di f agli estremi dell'intervallo. Osserviamo che abbiamo $f(x) \sim \frac{1}{3\sqrt{x-3}}$ per $x \to 3^+$ e $f(x) \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ per $x \to +\infty$. Spezziamo l'integrale sui due intervalli $]3,4]$ e $[4,+\infty[$. Poiché $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx$ e $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ sono convergenti, per il criterio del confronto asintotico [lezione 40, pag. 423] anche gli integrali $\displaystyle\int_3^4 f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\,dx$ sono convergenti. In definitiva, l'integrale improprio proposto è convergente.

(ii) Per calcolare una primitiva della funzione integranda $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x-3}}$ usiamo la sostituzione $\sqrt{x-3} = t$, da cui otteniamo $x = t^2+3$. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x-3}}\,dx &= \int \frac{1}{(t^2+3)t}\cdot 2t\,dt = \int \frac{2}{t^2+3}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{(\frac{t}{\sqrt{3}})^2+1}\,dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}}\right) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Calcoliamo il valore dell'integrale dato.

$$\begin{aligned}\int_3^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-3}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{3+\varepsilon}^4 f(x)\,dx + \lim_{M\to+\infty}\int_4^M f(x)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}}\right)\right]_{3+\varepsilon}^4 + \lim_{M\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{3}}\right)\right]_4^M \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

b5) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - 2y = xe^{3x} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione.

L'equazione differenziale data è lineare del primo ordine della forma $y' = a(x)y + b(x)$, dove $a(x) = 2$ e $b(x) = xe^{3x}$ sono definite su $\mathbb{R}$ e continue su $\mathbb{R}$. Ricordando la formula risolutiva [lezione 42, pag. 451], tutte le soluzioni dell'equazione differenziale su $\mathbb{R}$ sono della forma

$$y(x) = e^{A(x)}\left(c + \int b(x)e^{-A(x)}\,dx\right),$$

dove $A(x) = 2x$ è una primitiva di $a(x)$ e c è un numero reale arbitrario. Integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned}y(x) &= e^{2x}\left(c + \int xe^{3x}e^{-2x}\,dx\right) = e^{2x}\left(c + \int xe^x\,dx\right) \\ &= e^{2x}\left(c + xe^x - \int e^x\,dx\right) = e^{2x}\left(c + xe^x - e^x\right).\end{aligned}$$

Imponendo $y(0) = 1$, otteniamo $1 = c - 1$, cioè $c = 2$. In definitiva, la soluzione del problema di Cauchy dato è

$$y(x) = 2e^{2x} + (x-1)e^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

b6) i) Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione. f si dice *iniettiva su* $[0,1]$ se ...

ii) Scrivete la formula e la dimostrazione della derivata del prodotto di due funzioni derivabili.

Soluzione.
(i) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ si dice iniettiva su $[0,1]$ se

$$\forall x_1, x_2 \in [0,1] \text{ si ha } \big[(x_1 \neq x_2) \implies \big(f(x_1) \neq f(x_2)\big)\big]$$

o, equivalentemente, se

$$\forall x_1, x_2 \in [0,1] \text{ si ha } \big[\big(f(x_1) = f(x_2)\big) \implies (x_1 = x_2)\big].$$

(ii) Siano $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in $x_0 \in]a,b[$. Allora $(fg)'$ è derivabile in x_0 e vale $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
Dimostrazione: vedi [lezione 25, pag. 269].

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

Prova scritta di Analisi Matematica 1
A.A. 2019–2020 — Trento, 23 luglio 2020

Svolgimento prima parte

a1) Sia $A =]-1,0[\cup \{2\}$. Determinate l'insieme dei maggioranti e l'insieme dei minoranti di A.

Soluzione.

Per definizione un numero reale r è maggiorante per A se per ogni $x \in A$ vale $x \leq r$. Quindi ogni numero $r \geq 2$ è una maggiorante per A. L'insieme dei maggioranti di A è $[2,+\infty[$. Analogamente, un numero reale r è minorante per A se per ogni $x \in A$ vale $r \leq x$. Quindi ogni numero $r \leq -1$ è una minorante per A. L'insieme dei minoranti di A è $]-\infty,-1]$.

a2) Sia $z = 1 + 2i$. Determinate $\mathrm{Re}(zi)$.

Soluzione.

Poiché abbiamo $iz = i + 2i^2 = -2 + i$, otteniamo $\mathrm{Re}(iz) = -2$.

a3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false:

i) Se f è strettamente crescente, allora f è iniettiva.
ii) Se f è strettamente crescente, allora f è continua.
iii) Se f è iniettiva, allora f è continua.

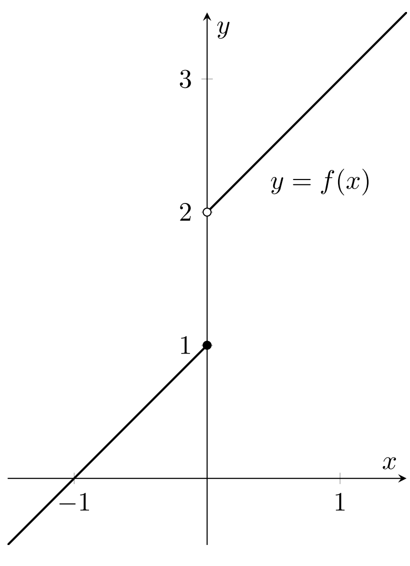
Soluzione.

L'affermazione (i) è vera. Infatti, siano $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$. Senza perdita di generalità possiamo supporre $x_1 < x_2$. Se f è strettamente crescente, allora si ha $f(x_1) < f(x_2)$; in particolare vale $f(x_1) \neq f(x_2)$ e dunque f è iniettiva.

Le affermazioni (ii) e (iii) sono false. Infatti, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ x+2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ e quindi iniettiva, ma non è continua in $x = 0$.



a4) Determinate il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{2^x - 1}$.

Soluzione.

La funzione f è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ che soddisfa $2^x - 1 \geq 0$, quindi per $x \geq 0$. Perciò il dominio di f è $[0, +\infty[$.

a5) Calcolate $f'(0)$, se $f(x) = x \log(e^x + 3)$.

Soluzione.

Usando la formula per la derivata del prodotto di due funzioni e quella per la derivata di una funzione composta, otteniamo

$$f'(x) = \log(e^x + 3) + x[\log(e^x + 3)]' = \log(e^x + 3) + x\frac{e^x}{e^x + 3}.$$

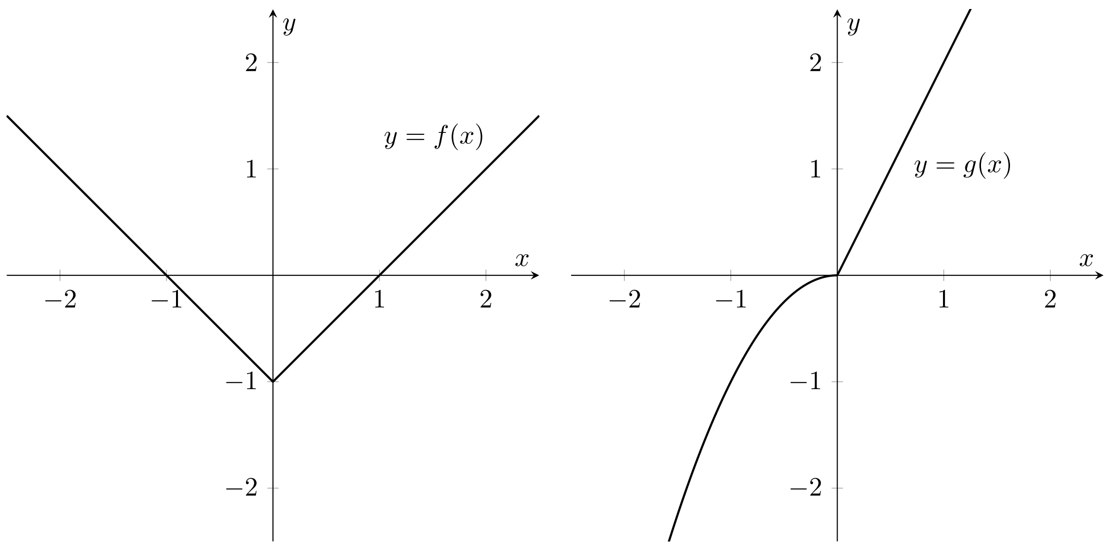
Quindi vale $f'(0) = \log 4$.

a6) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = |x| - 1$ e $g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$

Determinate l'espressione della funzione composta $(g \circ f)(x)$.

Soluzione.

Rappresentiamo i grafici delle funzioni f e g.



Poiché sia f sia g sono definite su $\mathbb{R}$, anche la funzione composta $g \circ f$ è definita su $\mathbb{R}$. Usando la definizione di g otteniamo

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} -(f(x))^2 & \text{se } f(x) < 0 \\ 2f(x) & \text{se } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Leggendo il segno di f dal suo grafico otteniamo

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} -(|x| - 1)^2 & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2(|x| - 1) & \text{se } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1. \end{cases}$$

a7) Calcolate $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-n}$.

Soluzione.

Ricordiamo il limite notevole $\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=e$. Ponendo $m=2n$, cioè $n=\frac{m}{2}$, nel limite dato otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-n}=\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-\frac{m}{2}}=\lim_{m\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Per ogni numero reale $r\in\mathbb{R}$, grazie alla continuità della funzione x^r vale

$$\lim_{m\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{r}=e^r.$$

Otteniamo quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-n}=\lim_{m\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

a8) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=\sin 2x$ nel punto $(\pi,0)$.

Soluzione.

L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(\pi,0)$ è $y=f(\pi)+f'(\pi)(x-\pi)$. Usando il teorema della derivata di una funzione composta [lezione 25, pag. 276], la derivata di f è $f'(x)=2\cos 2x$. L'equazione cercata è quindi $y=2x-2\pi$.

a9) Determinate $\int\frac{4x}{1+x^2}\,dx$.

Soluzione.

Osserviamo che la funzione integranda è, a meno di un fattore costante, la derivata della funzione composta $\log(1+x^2)$. Infatti, abbiamo

$$\left(\log(1+x^2)\right)'=\frac{2x}{1+x^2}.$$

Otteniamo quindi

$$\int\frac{4x}{1+x^2}dx=2\int\frac{2x}{1+x^2}dx=2\log(1+x^2)+c,\quad c\in\mathbb{R}.$$

a10) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y'=x^2+2$.

Soluzione.

Per definizione di primitiva, le soluzioni dell'equazione differenziale $y'=x^2+2$ sono le primitive della funzione x^2+2, cioè le funzioni $y(x)=\frac{x^3}{3}+2x+c$ con $c\in\mathbb{R}$.

Svolgimento seconda parte

b1) Risolvete in $\mathbb{C}$ il sistema di equazioni

$$\begin{cases} z^2 + \overline{z}^2 = 2 \\ \mathrm{Im}[(1-i)z - \overline{z}] = 1. \end{cases}$$

Soluzione.

Ponendo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ nel sistema dato, otteniamo

$$\begin{cases} (x+iy)^2 + (x-iy)^2 = 2 \\ \mathrm{Im}\big[(1-i)(x+iy) - (x-iy)\big] = 1. \end{cases}$$

Svolgendo i conti ricaviamo

$$\begin{cases} x^2 + \cancel{2xyi} - y^2 + x^2 - \cancel{2xyi} - y^2 = 2 \\ \mathrm{Im}[x + iy - ix + y - x + iy] = 1. \end{cases}$$

Risolviamo il sistema ottenuto.

$$\begin{cases} 2x^2 - 2y^2 = 2 \\ 2y - x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x = 2y - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (2y-1)^2 - y^2 = 1 \\ x = 2y - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y^2 - 4y = 0 \\ x = 2y - 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \text{ oppure } y = \frac{4}{3} \\ x = 2y - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = \frac{4}{3} \\ x = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Perciò le soluzioni del sistema dato sono $z_1 = -1$ e $z_2 = \frac{5}{3} + \frac{4}{3}i$.

b2) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^\alpha}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}}$.

Soluzione.

Osserviamo che il limite si presenta nella forma $\left[\dfrac{0}{\infty - \infty}\right]$ e, riscrivendolo come

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^\alpha}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)},$$

nella forma $\left[\dfrac{0}{\infty \cdot 0}\right]$. Utilizzando gli sviluppi di Taylor per $t \to 0$ di $\cos t$ e $\sqrt{1+t}$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \qquad \sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^\alpha}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)^\alpha}{n\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^\alpha}{n\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2n^2}\right)^\alpha (1 + o(1))^\alpha}{\frac{1}{2} + o(1)}. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^\alpha}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 0 \\ 2 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

b3) i) Studiate (dominio, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità/punti di non-derivabilità, punti critici e loro natura) la funzione $f(x) = (x^2 - |x|)e^x$ e tracciatene un grafico qualitativo.

ii) Calcolate $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\ dx$.

iii) Rappresentate graficamente la funzione $x \mapsto f(|x|)$ e la funzione $x \mapsto |f(|x|)|$.

Soluzione.

Dominio. La funzione data è ottenuta sommando e moltiplicando funzioni definite su $\mathbb{R}$ e quindi il suo dominio è $\mathbb{R}$.

Segno. La funzione f è data da

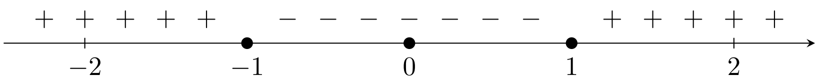
$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)e^x & \text{se } x < 0 \\ (x^2 - x)e^x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Poiché e^x assume soltanto valori positivi, il segno di f coincide con quello di $x^2 + x$ se $x < 0$ e con quello di $x^2 - x$ se $x \geq 0$.

Il polinomio $x^2 + x$, che è uguale a $x(x + 1)$, si annulla in -1 e 0, assume valori negativi su $]-1, 0[$ e positivi $\mathbb{R} \setminus [-1, 0]$.

Il polinomio $x^2 - x$, che è uguale a $x(x - 1)$, si annulla in 0 e 1, assume valori negativi su $]0, 1[$ e positivi su $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$.

Rappresentiamo il segno di f.



Comportamento agli estremi del dominio. Il dominio di f è $]-\infty, +\infty[$ e quindi gli estremi del dominio sono $-\infty$ e $+\infty$.

Per $x \to -\infty$ il limite $\lim_{x\to-\infty} (x^2 + x)e^x$ si presenta nella forme indeterminata $[+\infty \cdot 0]$. Rappresentando la funzione come il rapporto $\dfrac{x^2 + x}{e^{-x}}$ e usando la gerarchia degli infiniti [lezione 24, pag. 208] otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + x}{e^{-x}} = 0.$$

La funzione f ha come asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ la retta di equazione $y = 0$.

Per $x \to +\infty$ abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - x)e^x = +\infty.$$

Poiché vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (x - 1)e^x = +\infty,$$

la funzione f non ammette un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Continuità. La funzione data è ottenuta sommando e moltiplicando funzioni continue su $\mathbb{R}$ e quindi è continua su $\mathbb{R}$.

Derivabilità. Ricordando che abbiamo

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)e^x & \text{se } x < 0 \\ (x^2 - x)e^x & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

osserviamo che f è ottenuta sommando e moltiplicando funzioni derivabili sul loro dominio. Perciò per $x \neq 0$ la funzione f è derivabile e si ha, usando l'algebra delle derivate [lezione 24, pag. 268],

$$f'(x) = \begin{cases} (2x+1)e^x + (x^2+x)e^x & \text{se } x < 0 \\ (2x-1)e^x + (x^2-x)e^x & \text{se } x > 0, \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad f'(x) = \begin{cases} (x^2+3x+1)e^x & \text{se } x < 0 \\ (x^2+x-1)e^x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Studiamo la derivabilità di f in 0. La funzione f è continua in $x = 0$. Per il corollario del teorema di de l'Hôpital [lezione 29, pag. 316] abbiamo

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2+3x+1)e^x = 1$$

e

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2+x-1)e^x = -1.$$

Perciò f non è derivabile in 0 e il punto $(0,0)$ è un punto angoloso del grafico di f.

Punti critici e loro natura. La derivata f' di f è data da

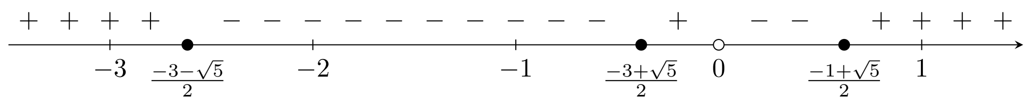
$$f'(x) = \begin{cases} (x^2+3x+1)e^x & \text{se } x < 0 \\ (x^2+x-1)e^x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Poiché e^x assume soltanto valori positivi, il segno di f' coincide con quello di x^2+3x+1 se $x < 0$ e con quello di x^2+x-1 se $x > 0$.

Il polinomio x^2+3x+1 si annulla in $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, assume valori negativi su $\left]\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right[$ e positivi su $\mathbb{R} \setminus [\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}]$.

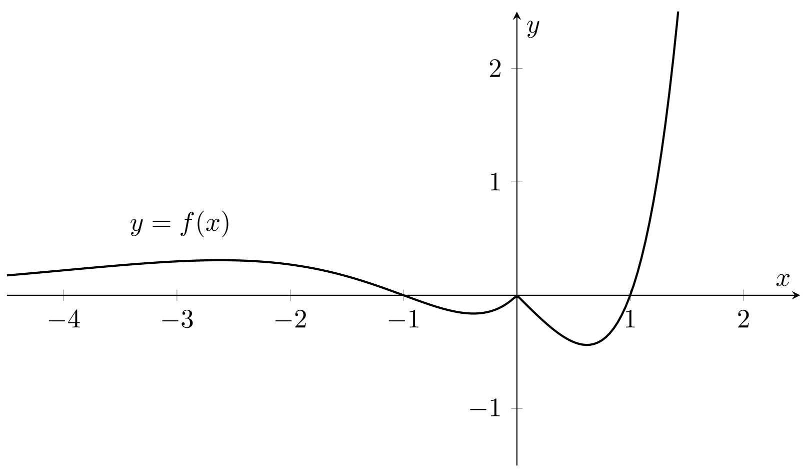
Il polinomio x^2+x-1 si annulla in $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, assume valori negativi su $\left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$ e positivi su $\mathbb{R} \setminus [\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$.

Rappresentiamo il segno di f'.



I punti critici di f sono $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Dal segno della derivata osserviamo che la funzione f è strettamente crescente sugli intervalli $\left]-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]$, $[\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, 0]$ e $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$, mentre è strettamente decrescente sugli intervalli $[\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}]$ e $[0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$. Perciò $x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo locale stretto per f, mentre $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ sono punti di minimo locale stretto per f.



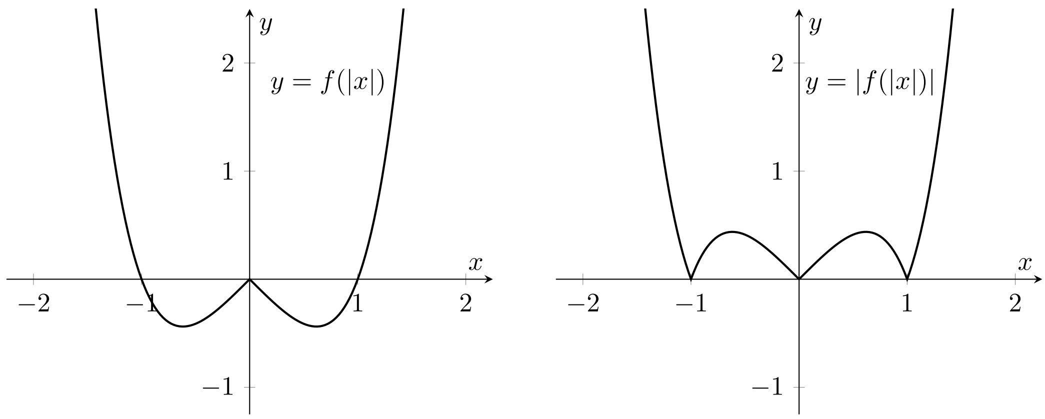
(ii) Usando due volte l'integrazione per parti [lezione 38, pag. 399] abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} (x^2+x)e^x\,dx &= \Big[(x^2+x)e^x\Big]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0}(2x+1)e^x\,dx \\
&= -(4-2)e^{-2} - \int_{-2}^{0}(2x+1)e^x\,dx \\
&= -2e^{-2} - \left(\Big[(2x+1)e^x\Big]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} 2e^x\,dx\right) \\
&= -2e^{-2} - \left(1+3e^{-2} - \Big[2e^x\Big]_{-2}^{0}\right) \\
&= -2e^{-2} - \left(1+3e^{-2}-2+2e^{-2}\right) = 1 - \frac{7}{e^2}.
\end{aligned}$$

(iii) Il grafico della funzione $x \mapsto f(|x|)$ è simmetrico rispetto all'asse delle y. Per $x \geq 0$ coincide con quello della funzione f.

Il grafico della funzione $x \mapsto |f(|x|)|$ si ottiene dal grafico della funzione $x \mapsto f(|x|)$ simmetrizzando rispetto all'asse delle x le parti di grafico che stanno sotto l'asse.

Rappresentiamo graficamente la funzione $x \mapsto f(|x|)$ e $x \mapsto |f(|x|)|$.



b4) Determinate l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x^2-3)^n}{n}$.

Soluzione.

Poniamo $t = x^2-3$ e studiamo la convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}t^n.$$

Poiché abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

per il criterio della radice n-esima [lezione 33, pag. 354] la serie di potenze in t ha raggio di convergenza $R=1$ e converge per ogni $t \in\,]-1,1[$. Per $t=-1$ la serie si riduce a una serie armonica divergente. Per $t=1$ la serie è $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, che converge per il teorema di Leibniz [lezione 34, pag. 360]. Perciò la serie in t converge se e solo se si ha $t \in\,]-1,1]$. Ricordando $t = x^2-3$, la serie data è convergente se e solo se si ha $-1 < x^2-3 \leq 1$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2-3 > -1 \\ x^2-3 \leq 1, \end{cases}$$

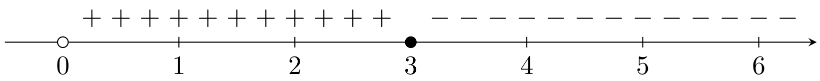
ricaviamo che l'insieme di convergenza della serie data è $\left[-2,-\sqrt{2}\right[\cup\left]\sqrt{2},2\right]$.

b5) i) Tracciate un grafico qualitativo della funzione $f(x)=\dfrac{3-x}{x^2}$ su $]0,+\infty[$.

ii) Sia $A=\{x_n=f(n): n\in\mathbb{N}, n\geq 1\}$. Determinate l'estremo inferiore e l'estremo superiore di A. Dite se sono minimo e/o massimo, rispettivamente.

Soluzione.

Segno di f. Rappresentiamo il segno della funzione f.



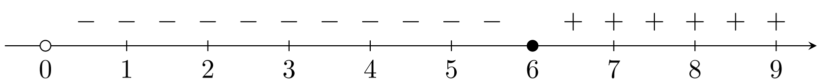
Comportamento di f agli estremi del dominio. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

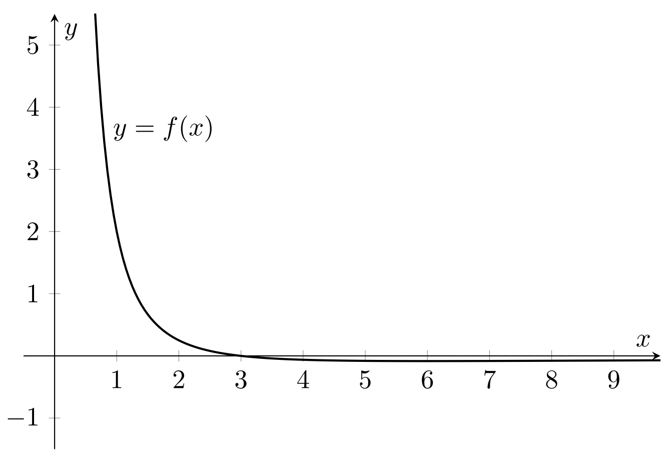
Derivata f' di f. Essendo rapporto di funzioni derivabili, la funzione f è derivabile. Calcoliamo la derivata f' di f:

$$f'(x)=\frac{-x^2-(3-x)\,2x}{x^4}=\frac{x^2-6x}{x^4}=\frac{x-6}{x^3}.$$

Rappresentiamo il segno di f'.



Dal segno della derivata segue che la funzione f è strettamente decrescente sull'intervallo $]0,6]$ ed è strettamente crescente sull'intervallo $[6,+\infty[$. Il punto $x=6$ è il punto di minimo assoluto per f e vale $f(6)=-\frac{1}{12}$.



(ii) Da (i) seguono

$$\inf A=\min A=f(6)=-\frac{1}{12} \qquad \text{e} \qquad \sup A=\max A=f(1)=2.$$

b6) i) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione. Scrivete la definizione di $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

ii) Enunciate e provate il teorema di esistenza degli zeri.

Soluzione.

(i) Si scrive $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ se per ogni intorno V di 2 esiste un intorno U di $+\infty$ tale che per ogni $x \in U$ si ha $f(x) \in V$, cioè se vale

$$\forall\varepsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x > M, |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

(ii) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste $c \in]a, b[$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione: vedi [lezione 23, pag. 248].

Università di Trento — Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
CdL in Informatica — CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica

Prova scritta di Analisi Matematica 1
A.A. 2019–2020 — Trento, 10 settembre 2020

Svolgimento prima parte

a1) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 1\}$.

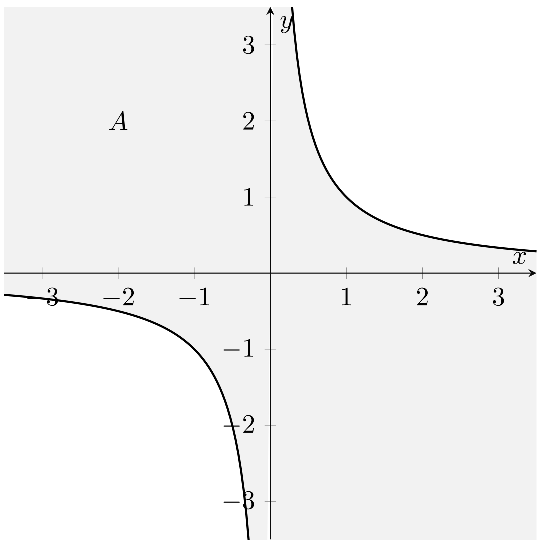
Soluzione.
Abbiamo

$$xy \leq 1 \iff \begin{cases} x < 0 \quad \text{e} \quad y \geq \frac{1}{x} \\ x = 0 \quad \text{e} \quad y \in \mathbb{R} \\ x > 0 \quad \text{e} \quad y \leq \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Otteniamo perciò

$$A = \{(x, y) : x < 0, y \geq \frac{1}{x}\} \cup \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y) : x > 0, y \leq \frac{1}{x}\}.$$

L'insieme A è costituito dai punti che appartengono all'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$ e dai punti che appartengono all'insieme delimitato dai due rami dell'iperbole e contenente i due assi cartesiani.



a2) Individuate la monotonia delle successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dove $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ e $b_n = \sin a_n$.

Soluzione.
Possiamo riscrivere ogni termine a_n della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ come

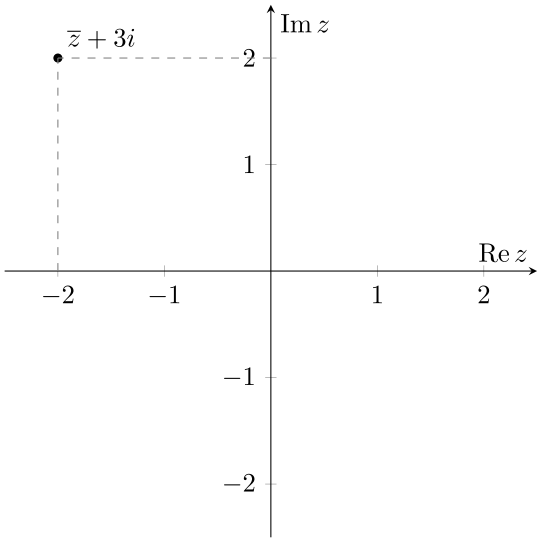
$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Poiché la successione $\{\frac{1}{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente, la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente. Inoltre, ogni termine della successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è positivo e minore di 1. Poiché la funzione $\sin x$ è strettamente crescente sull'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ e quindi in particolare sull'intervallo $[0, 1]$, la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente.

a3) Sia $z = -2 + i$. Rappresentate nel piano di Gauss il numero complesso $\overline{z} + 3i$.

Soluzione.

Abbiamo $\overline{z} + 3i = -2 - i + 3i = -2 + 2i$.



a4) Stabilite, motivando la risposta, se la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 - \sin(x-1) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

è continua in $x = 1$.

Soluzione.

La funzione è continua in $x = 1$ se e solo se i limiti $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ esistono finiti e sono uguali al valore $f(1) = 1^2 = 1$. Poiché abbiamo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} [2 - \sin(x-1)] = 2,$$

la funzione f non è continua in $x = 1$.

a5) Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale, per $x \to 0^+$, della funzione

$$f(x) = \sin x + \cos\sqrt{2x} - 1.$$

Soluzione.

Osserviamo che lo sviluppo di Taylor al primo ordine in $x = 0$ della funzione f è

$$\sin x + \cos\sqrt{2x} - 1 = x + o(x) + 1 - \frac{(\sqrt{2x})^2}{2} + o\big((\sqrt{2x})^2\big) - 1 = x + o(x) + 1 - x + o(x) - 1 = 0 + o(x).$$

Scriviamo quindi lo sviluppo di Taylor al secondo ordine in $x = 0$ della funzione f. Abbiamo per $x \to 0^+$

$$\begin{aligned} \sin x + \cos\sqrt{2x} - 1 &= x + o(x^2) + 1 - \frac{(\sqrt{2x})^2}{2} + \frac{(\sqrt{2x})^4}{4!} + o((\sqrt{2x})^4) - 1 \\ &= x - x + \frac{4x^2}{4 \cdot 6} + o(x^2) = \frac{x^2}{6} + o(x^2). \end{aligned}$$

Perciò per $x \to 0^+$ la funzione f ha ordine di infinitesimo 2 e parte principale $\frac{x^2}{6}$.

a6) Siano date le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \le 0 \\ -2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \ge 0. \end{cases}$$

Determinate la funzione composta $f \circ g$.

Soluzione.

Poiché sia f sia g sono definite su $\mathbb{R}$, anche la funzione composta $f \circ g$ è composta su $\mathbb{R}$. Usando la definizione di funzione composta otteniamo

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} \big(g(x)\big)^2 - 1 & \text{se } g(x) \le 0 \\ -2 & \text{se } g(x) > 0. \end{cases}$$

Osserviamo che la funzione g assume soltanto valori positivi. Perciò per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$(f \circ g)(x) = -2.$$

a7) Calcolate $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + e^n}{n - e^{2n}}$.

Soluzione.

Osserviamo che dalla gerarchia degli infiniti [lezione 24, pag. 208] per $n \to +\infty$ abbiamo $n^2 + e^n = o(e^{2n})$ e $n - e^{2n} = -e^{2n} + o(e^{2n})$. Quindi otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + e^n}{n - e^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{o(e^{2n})}{-e^{2n} + o(e^{2n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{o(e^{2n})}{e^{2n}\big(-1 + o(1)\big)} = 0.$$

a8) Calcolate $F'(0)$, dove $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x} \sqrt{4 + t^2}\, dt$.

Soluzione.

Osserviamo che abbiamo $F(x) = G\big(h(x)\big)$ con $G(x) = \displaystyle\int_0^{x} \sqrt{4 + t^2}\, dt$ e $h(x) = 2x$. Ricordando il teorema fondamentale del calcolo integrale [lezione 37, pag. 388], la derivata F' della funzione composta $F = G \circ h$ è data da

$$F'(x) = G'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) = \sqrt{4 + (2x)^2} \cdot 2 = 2\sqrt{4 + (2x)^2}.$$

Perciò abbiamo $F'(0) = 4$.

a9) Determinate $\displaystyle\int \frac{4}{x^2 + 1}\, dx$.

Soluzione.

Abbiamo

$$\int \frac{4}{1 + x^2}\, dx = 4 \int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = 4 \arctan x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

a10) Discutete la convergenza del seguente integrale improprio $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[4]{x - 2}}\, dx$.

Soluzione.

La funzione $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^{\frac{1}{4}}}$ è continua e positiva sull'intervallo $]2, 3]$. Ricordando che per $\alpha > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\, dx$ esiste finito se e solo se si ha $\alpha < 1$, l'integrale dato è finito.

Svolgimento seconda parte

b1) Sia $f : [-1, e] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x\,|x| & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 2\log x + 1 & \text{se } x \in \,]1, e]\,. \end{cases}$$

i) Verificate che f è continua su $[-1, e]$ e derivabile su $]-1, e[$.

ii) Rappresentate graficamente f.

iii) Per il teorema di Lagrange esiste $c \in \,]0, e[$ tale che $f'(c)$ è la pendenza della retta passante per i punti $\big(0, f(0)\big)$ e $\big(e, f(e)\big)$. Determinate tutti i punti $c \in \,]0, e[$ con questa proprietà.

Soluzione.

(i) La funzione f è continua su $[-1, e] \setminus \{1\}$, poiché è ottenuta sommando e moltiplicando funzioni continue. Verifichiamo la continuità di f in $x = 1$. Poiché abbiamo

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x|x| = 1, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2\log x + 1) = 1 \qquad \text{e} \qquad f(1) = 1,$$

la funzione f è continua anche in $x = 1$.

La funzione f è derivabile su $]-1, e[\, \setminus \{0, 1\}$, poiché è ottenuta sommando e moltiplicando funzioni derivabili. Osserviamo che la derivata prima f' di f $]-1, e[\, \setminus \{0, 1\}$ è data da

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x \in \,]-1, 0[\\ 2x & \text{se } x \in \,]0, 1[\\ \frac{2}{x} & \text{se } x \in \,]1, e[\,. \end{cases}$$

Poiché f è continua in $x = 0$ e derivabile su $]-1, 1[\, \setminus \{0\}$, usando il corollario del teorema di de l'Hôpital [lezione 29, pag. 316] otteniamo

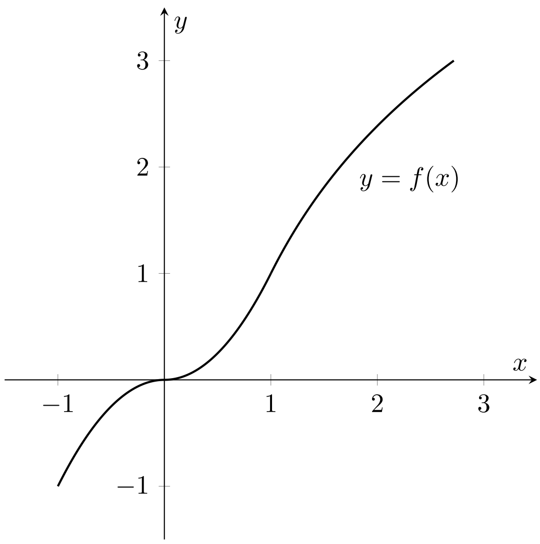
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-2x) = 0 \qquad \text{e} \qquad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0.$$

Perciò f è derivabile in $x = 0$ e vale $f'(0) = 0$. Similmente in $x = 1$ abbiamo

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x) = 2 \qquad \text{e} \qquad f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

e quindi f è derivabile anche in $x = 1$ e vale $f'(1) = 2$.

(ii) Rappresentiamo il grafico di f.



(iii) Abbiamo $\big(0, f(0)\big) = (0,0)$ e $\big(e, f(e)\big) = (e,3)$. Per il teorema di Lagrange [lezione 26, pag. 286] esiste $c \in [0,e]$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(e)-f(0)}{e-0} = \frac{3}{e}.$$

Per determinare tutti i punti richiesti risolviamo quindi l'equazione $f'(x) = \frac{3}{e}$. Ricordando che vale

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [0,1] \\ \frac{2}{x} & \text{se } x \in [1,e], \end{cases}$$

abbiamo

$$2x = \frac{3}{e} \iff x = \frac{3}{2e} \qquad \text{e} \qquad \frac{2}{x} = \frac{3}{e} \iff x = \frac{2e}{3}.$$

Poiché abbiamo $\frac{3}{2e} \in [0,1]$ e $\frac{2e}{3} \in [1,e]$, questi due punti sono tutti i punti c richiesti.

b2) i) Studiate (dominio, simmetrie, segno, comportamento agli estremi del dominio, asintoti, continuità, derivabilità/non-derivabilità, punti critici e loro natura) della funzione $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$. Tracciate un grafico qualitativo della funzione f.

ii) Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x=0$ e $x=1$.

Soluzione.

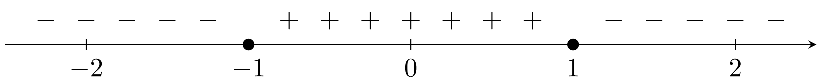
(i) **Dominio.** La funzione f è ottenuta componendo funzioni definite su $\mathbb{R}$ e ha quindi anch'essa dominio $\mathbb{R}$.

Simmetria. La funzione f è una funzione pari: è infatti definita su un insieme simmetrico rispetto all'origine e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$f(-x) = \sqrt[3]{1-(-x)^2} = \sqrt[3]{1-x^2} = f(x).$$

La simmetria ci permette quindi di studiare f ristretta all'intervallo $[0,+\infty[$, che indichiamo con g. Il grafico di f è infatti simmetrico rispetto all'asse delle y.

Segno. Il segno della funzione f coincide con quello di $1-x^2$, che si annulla in -1 e 1, assume valori positivi su $]-1,1[$ e negativi su $\mathbb{R} \setminus [-1,1]$. Rappresentiamo il segno di f.



Comportamento agli estremi del dominio. Abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

Osserviamo inoltre che per $x \to +\infty$ si ha $g(x) \sim -\sqrt[3]{x^2}$ e quindi g non ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Continuità. La funzione f è continua in quanto è ottenuta componendo funzioni continue.

Derivabilità. Ricordando che la funzione $\sqrt[3]{x}$ è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, per $x \notin \{-1,1\}$ la funzione f è derivabile in quanto è ottenuta componendo funzioni derivabili e vale

$$f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}.$$

Poiché g è continua su $[0,+\infty[$ e derivabile su $]0,+\infty[\setminus\{1\}$, dal corollario del teorema di de l'Hôpital [lezione 29, pag. 316] otteniamo

$$g'_-(1) = \lim_{x\to1^-} g'(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad g'_+(1) = \lim_{x\to1^+} g'(x) = -\infty.$$

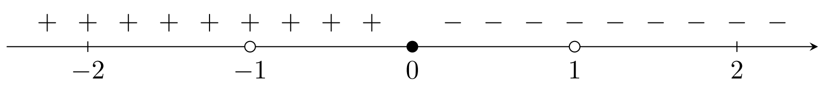
Perciò il punto $(1,0)$ e il suo simmetrico $(-1,0)$ rispetto all'asse delle ordinate sono punti del grafico di f a tangente verticale e f non è derivabile in -1 e 1.

Possiamo dimostrare che il punto $(1,0)$ è un punto a tangente verticale del grafico di g anche senza usare il corollario di de l'Hôpital. Infatti, la funzione $-\sqrt[3]{x}$ ha un un punto a tangente verticale in $(0,0)$, si ha

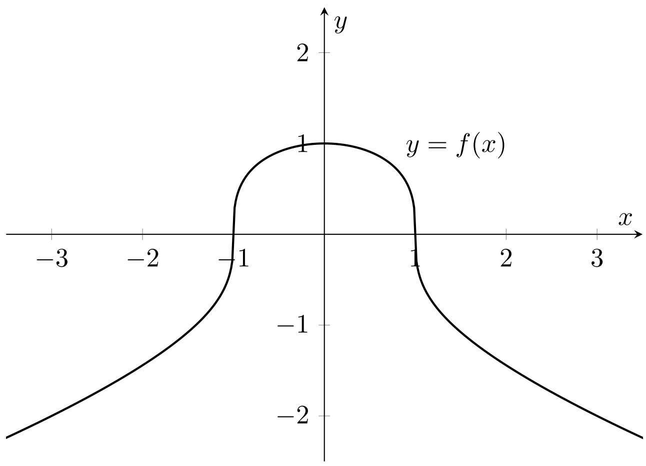
$$g(x) = \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} \sim \sqrt[3]{2}\sqrt[3]{1-x} \quad \text{per } x \to 1$$

e il grafico di $\sqrt[3]{1-x} = -\sqrt[3]{x-1}$ si ottiene traslando verso destra di 1 quello di $-\sqrt[3]{x}$.

Punti critici e loro natura. Rappresentiamo il segno di f'.



L'unico punto critico di f è 0 ed è un punto di massimo assoluto stretto di f. Rappresentiamo il grafico di f.



(ii) La retta tangente al grafico di f in $(0,1)$ è orizzontale e ha equazione $y = 1$, mentre la retta tangente in $(1,0)$ è verticale e ha equazione $x = 1$.

b3) Determinate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, il limite $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt[3]{n}}\right)^n$.

Soluzione.

Abbiamo

$$\left(1 + \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt[3]{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{3}}}\right)^n = e^{n\log\left(1 + \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{3}}}\right)}.$$

Usando lo sviluppo di Taylor $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \to 0$, otteniamo

$$n\left(\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{3}}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{3}}}\right)\right) = \frac{1}{n^{\alpha-\frac{2}{3}}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\frac{2}{3}}}\right) \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Usando il limite $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ e la continuità dell'esponenziale ricaviamo

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\sqrt[3]{n}}\right)^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < \frac{2}{3} \\ e & \text{se } \alpha = \frac{2}{3} \\ 1 & \text{se } \alpha > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

b4) Determinate l'insieme di convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{3n\log n}$.

Soluzione.

Osserviamo che la serie data è la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n(x-1)^n$ con coefficienti $a_n = \frac{1}{3n\log n}$. Poiché abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{3}n\log n}{\cancel{3}(n+1)\log(n+1)} = 1,$$

per il criterio del rapporto [lezione 33, pag. 355] il raggio di convergenza della serie è il reciproco di 1, cioè 1. Perciò per ogni $x \in \mathbb{R}$ per cui vale $|x-1| < 1$, cioè per ogni $x \in]0,2[$, la serie converge, mentre non converge se $x \in \mathbb{R} \setminus [0,2]$. Rimane da controllare il carattere della serie agli estremi dell'intervallo, cioè per $x = 0$ e $x = 2$.

Per $x = 0$ la serie data è $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n\log n}$, che è una serie a segni alterni. Converge grazie al teorema di Leibniz [lezione 34, pag. 360], poiché la successione dei termini $\frac{1}{3n\log n}$ è positiva, decrescente e infinitesima.

Per $x = 2$ la serie è $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{3n\log n}$ risulta divergente positivamente [lezione 41, pag. 435].

L'insieme di convergenza della serie data è $[0,2[$.

b5) i) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2(e^x + 2x) \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

ii) Determinate l'equazione degli asintoti che presenta la soluzione.

Soluzione.

(i) Notiamo che la funzione costante $y(x) = 0$ è soluzione dell'equazione differenziale data, ma non soddisfa il dato iniziale $y(0) = -1$. Grazie al teorema di esistenza ed unicità locale per il problema di Cauchy [lezione 42, pag. 446] il valore 0 non è assunto da nessun'altra soluzione. Possiamo riscrivere l'equazione differenziale data come

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = e^x + 2x,$$

da cui segue

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx = \int (e^x + 2x)\,dx.$$

Essendo $-\dfrac{1}{y(x)}$ una primitiva della funzione $\dfrac{y'(x)}{y^2(x)}$, segue $-\dfrac{1}{y(x)} = e^x + x^2 + x$, $c \in \mathbb{R}$, e quindi otteniamo

$$y(x) = -\frac{1}{e^x + x^2 + c} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = -1$, ricaviamo che

$$y(x) = -\frac{1}{e^x + x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

è l'unica soluzione del problema di Cauchy dato.

(ii) La soluzione del problema di Cauchy è definita su $\mathbb{R}$. Poiché abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

l'unico asintoto di f è la retta di equazione $y = 0$, che è asintoto orizzontale di f sia per $x \to -\infty$ sia per $x \to +\infty$.

b6) i) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è *strettamente crescente su* $\mathbb{R}$ se ...

ii) Scrivete l'enunciato e la dimostrazione del teorema di Torricelli-Barrow.

Soluzione.

(i) La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è *strettamente crescente su* $\mathbb{R}$ se vale

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \big[(x_1 < x_2) \implies \big(f(x_1) < f(x_2)\big)\big].$$

(ii) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia G una primitiva di f su $[a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a).$$

Dimostrazione: vedi [lezione 37, pag. 392].