

Università di Trento - Dip. di Ingegneria e Scienza dell'Informazione
 CdL in Informatica - CdL in Ing. Informatica, delle Comunicazioni ed Elettronica
 SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA 1
 a.a. 2019/2020 - Trento, 21 dicembre 2019

FILA A 21) $f(x) = (\operatorname{arctg}(5x^2+1))^2$

$$f'(x) = 2[\operatorname{arctg}(5x^2+1)] \cdot \frac{1}{1+(5x^2+1)^2} \cdot 10x$$

$$= \frac{20x \operatorname{arctg}(5x^2+1)}{1+(5x^2+1)^2} \quad \square$$

22) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + e^x$. Abbiamo $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$; inoltre $f'(x) = 2 + e^x \forall x \in \mathbb{R}$

Quindi $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$. $\square$

23) $f: [-\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} 2x & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ e^x + x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ soddisfa il teorema di

Weierstrass se f è continua su $[-\frac{1}{2}, 1]$. Poiché f è continua $\forall x \in [-\frac{1}{2}, 0] \cup [0, 1]$, basta determinare $d \in \mathbb{R}$ tale che f risulti continua anche in $x = 0$. Poiché

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{2x} \cdot 2 = 2$, avremo f continua in $x = 0$ se e solo se $2 = f(0) = 1 + d$ ($= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$), quindi per $d = 1$. $\square$

24) $f(x) = x^3 - x$ su $\mathbb{R}$; abbiamo $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{2} = -\frac{1}{12}$. $\square$

26) $f(x) = e^x$; quindi $f'(x) = f''(x) = e^x$. Il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato in $x_0 = 1$, è dato da $P_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k = e + e(x-1) + \frac{e}{2}(x-1)^2$, ossia $P_2(x) = e \left[1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 \right]$. $\square$

27) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{2^n} \cdot a_n$ $a_n > 0$; poiché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$, per il criterio della radice n -esima la serie data è convergente. $\square$

28) $\int x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} [-\cos x^2] + c$, $c \in \mathbb{R}$. $\square$

29) $\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{x^{d+1}} dx$: $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ continua, $f(x) > 0$; $f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{x^{d+1}} = \frac{1}{x^{d+\frac{1}{2}}}$ per $x \rightarrow 0^+$
 Poiché $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} dx < +\infty \Leftrightarrow \beta < 1$, per il criterio del confronto asintotico l'integrale improprio dato è convergente se $0 \leq d < \frac{1}{2}$. $\square$

30) $y'(x) = -\frac{1}{2} y(x) \Leftrightarrow y(x) = c e^{-\frac{1}{2}x}$, $c \in \mathbb{R}$, $(\text{su } \mathbb{R})$. $\blacksquare$

b1) i) $f(x) = \begin{cases} -1 + \min(\alpha x^2 - x) & \text{se } x < 0 \\ \alpha \log(1+x) + \beta e^{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$

La funzione f è continua in $x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} [-1 + \min(\alpha x^2 - x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\alpha \log(1+x) + \beta e^{2x}] = f(0) = \beta$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{-1 = \beta}}.$

Quindi $f(x) = \begin{cases} -1 + \min(\alpha x^2 - x) & \text{se } x < 0 \\ \alpha \log(1+x) - e^{2x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è continua in $x_0 = 0$.

Osserviamo che $f'(x) = \begin{cases} (2\alpha x - 1) \cos(\alpha x^2 - x) & \text{se } x < 0 \\ \frac{\alpha}{1+x} - 2e^{2x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$

Poiché f è continua in $x_0 = 0$ e derivabile $\forall x \neq 0$, dal condizionale del teorema di de l'Hôpital segue che $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [(2\alpha x - 1) \cos(\alpha x^2 - x)] = -1$ e $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\frac{\alpha}{1+x} - 2e^{2x}] = \alpha - 2$. Risulta quindi che f è derivabile in $x_0 = 0$ se e solo se $\alpha - 2 = -1$, ossia $\alpha = 1$. $\square$

ii) a) Abbiamo quindi $f(x) = \begin{cases} -1 + \min(x^2 - x) & \text{se } x < 0 \\ \log(1+x) - e^{2x} & \text{se } x \geq 0; \end{cases}$

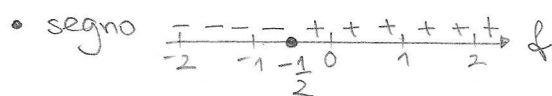
per tale funzione si ha $\underline{\underline{f'(0) = f'_-(0) = f'_+(0) = -1}}$. $\square$

b) L'eq. della retta tg al grafico di f nel pt. di ascissa $x_0 = 0$ è data da $y_1 = f(0) + f'(0)(x-0)$, ossia $y = -1 - x$. $\square$

c) $\int_0^1 (f(x) + e^{2x}) dx = \int_0^1 \log(1+x) dx$: oss. che $\int \log(1+x) dx = \int 1 \cdot \log(1+x) dx$
 $= x \log(1+x) - \int \frac{x}{1+x} dx = x \log(1+x) - \int \frac{x+1-1}{1+x} dx = x \log(1+x) - x + \log(1+x) + c$
 $= (x+1) \log(1+x) - x + c$, $c \in \mathbb{R}$; abbiamo dunque
 $\int_0^1 (f(x) + e^{2x}) dx = [(x+1) \log(1+x) - x]_0^1 = \underline{\underline{2(\log 2) - 1}}$. $\blacksquare$

b2) i) $f(x) = (x + |x+1|)e^{-x^2}$ • $\text{dom } f = \underline{\underline{\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[}}$.

$= \begin{cases} -e^{-x^2} & \text{se } x < -1 \\ (2x+1)e^{-x^2} & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$



- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \underline{y=0 \text{ \u00e8 asintoto orizzontale per } f}$
per $x \rightarrow -\infty$
($+\infty$)
- f continua su $\mathbb{R}$;
- $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ con

$$f'(x) = \begin{cases} +2xe^{-x^2} & \text{se } x < -1 \\ 2e^{-x^2} - 2x(2x+1)e^{-x^2} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{se } x < -1 \\ (-4x^2 - 2x + 2)e^{-x^2} & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

Controlliamo la derivabilit\u00e0 in $x=-1$.

Poich\u00e9 f \u00e8 continua in $x=-1$ e f derivabile $\forall x \neq -1$, dal collaudo del teorema di de l'H\u00f4pital segue che $f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -2e^{-1}$ e $f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = (-4+4)e^{-1} = 0$. Risultato quindi che f non \u00e8 derivabile in $x=-1$; inoltre $\underline{(-1, f(-1)) = (-1, -\frac{1}{e})}$ \u00e8 un pt. angoloso per f .

Oss. infine che $f'(x)=0 \Leftrightarrow -4x^2-2x+2=0$ (per $x > -1$)

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{-8} = \frac{2 \pm 6}{-8} = \begin{cases} -1 & \text{(da scartare)} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x = \frac{1}{2}$ pt. di max. loc. stretto per f

$$\underline{f(\frac{1}{2}) = 2e^{-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e}} \approx 1.6}$$

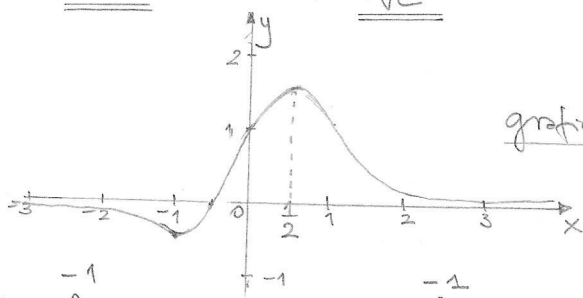
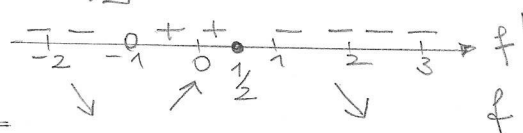


grafico qualitativo di f .

□

$$\text{ii)} \int_{-\infty}^{-1} x f(x) dx = \lim_{K \rightarrow -\infty} \int_K^{-1} (-x e^{-x^2}) dx = \lim_{K \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_K^{-1} = \frac{e^{-1}}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2e}}}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$

b3) i) Bisogna sviluppare il numeratore almeno fino al terzo ordine;

ricordando che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \rightarrow 0$, $\ln t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$,

$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$ otteniamo

(per calcolarlo usiamo gli sviluppi di Taylor)

$$e^{x^2} - 1 + \ln x^2 - \log^2(1 + \sqrt{2}x) = x^2 + o(x^3) + x^2 + o(x^3) - (\sqrt{2}x - x^2 + o(x^2))^2$$

-4-

$$= \cancel{2x^2} + o(x^3) - \cancel{2x^2} + 2\sqrt{2}x^3 + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2} - 1 + \sin x^2 - \log^2(1 + \sqrt{2}x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{2}x^3 + o(x^3)}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{2} + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}. \quad \square$$

Il limite in
presenta nella
forma indeterminata
 $\frac{0}{0}$

ii) Osserviamo che grazie al teorema fondamentale del Calcolo si ha

$$\frac{\left(\int_0^x (e^{t^2} - 1 + \sin t^2 - \log(1 + \sqrt{2}t)) dt \right)'}{(x^4)'} = \frac{e^{x^2} - 1 + \sin x^2 - \log(1 + \sqrt{2}x)}{4x^3}$$

(per determinarlo
usiamo il teorema
di de l'Hôpital)

conclude che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - 1 + \sin t^2 - \log(1 + \sqrt{2}t)) dt}{x^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ grazie a i). Applicando il teorema di de l'Hôpital si

b4) i) Abbiamo $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n^{\alpha+1}} \right) \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}} - \frac{1}{n^{\alpha+2}} \right).$

Perché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$, otteniamo immediatamente che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}} - \frac{1}{n^{\alpha+2}} \right) = \begin{cases} \text{convergente} & \Leftrightarrow \alpha+2 > 1 \\ \text{divergente negativi} & \Leftrightarrow \alpha+2 \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{convergente} & \Leftrightarrow \alpha > -1 \\ \text{divergente negativi} & \Leftrightarrow \alpha \leq -1. \end{cases} \quad \square$$

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha}}}_{a_n} (x-2)^n$: notiamo che $\sqrt[n]{\frac{1}{n^{\alpha}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, quindi il raggio di convergenza è dato da $\underline{\underline{r=1}}.$

Possiamo dunque dire che la serie data è sicuramente convergente $\forall x \in]2-r, 2+r[=]1, 3[$, $\forall \alpha \geq 0$.

Se $\underline{x=1}$, la serie risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$, che è convergente grazie al criterio di Leibniz $\forall \alpha > 0$ (per $\alpha=0$, la serie è irregolare);

se $\underline{x=3}$, la serie risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, che è convergente se e solo se $\alpha > 1$.

Quindi l'insieme di convergenza della serie di potenze data è

$\underline{\underline{E = [1, 3]}}$ se $\alpha > 1$, $\underline{\underline{E = [1, 3[}}$ se $0 < \alpha \leq 1$, ed $\underline{\underline{E =]1, 3[}}$ se $\alpha = 0$.

b5) Osserviamo che $4^x = -x^2 + 2$ ammette una soluzione nell'intervallo $[0,1]$ se e solo se $f(x) = 4^x + x^2 - 2$ ammette uno zero su $[0,1]$. f è continua su $[0,1]$ e $f(0) = -1$, $f(1) = 3$. Quindi per il teorema di Zwischen degli zeri $\exists$ un $x_0 \in]0,1[: f(x_0) = 0$.

Tale x_0 è unico, poiché f è strett. crescente su $[0,1]$ (somma di 2 funzioni strett. crescenti, oppure $f'(x) = 4^x \log 4 + 2x > 0$ su $[0,1]$).

Determiniamo $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ mediante il metodo di bisezione. Notiamo che il pt. medio di $[0,1]$ è $c_0 = \frac{1}{2}$ e $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{4} + \frac{1}{4} - 2 = \frac{1}{4} (> 0)$. Quindi $x_0 \in]0, \frac{1}{2}[$. Il pt. medio di $]0, \frac{1}{2}[$ è $c_1 = \frac{1}{4}$ e $f(\frac{1}{4}) = \sqrt[4]{4} + \frac{1}{16} - 2 = \sqrt{2} + \frac{1}{16} - 2 < 0$. Ora basta porre $[\tilde{a}, \tilde{b}] = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ e mi ha quanto richiesto. 

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice derivabile in $x_0 \in \mathbb{R}$ se esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{oppure equivalent. se esiste finito}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

□

ii) Enunciato e dimostrazione del criterio del confronto asintotico per serie a termini positivi. 

FILA(B): 21) $f(x) = (\log(3x^2+1))^2$

$$f'(x) = 2(\log(3x^2+1)) \cdot \frac{1}{3x^2+1} \cdot 6x$$

$$= \frac{12x \log(3x^2+1)}{3x^2+1}$$

□

22) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + e^x$. Abbiamo $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$; inoltre $f'(x) = 3 + e^x \forall x \in \mathbb{R}$.

Quindi $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$.

□

23) $f: [-1, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin 3x}{x} & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ e^x + \alpha & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ soddisfa il teorema

di Weierstrass se f è continua su $[-1, \frac{1}{2}]$. Poiché f è continua $\forall x \in [-1, 0[\cup]0, \frac{1}{2}]$,

basta determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che f risulti continua anche in $x=0$. Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arcsin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\arcsin 3x}{3x} \cdot 3 = 3, \text{ avremo } f \text{ continua in } x=0$$

$$\Leftrightarrow 3 = f(0) = 1 + \alpha \quad (= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)) \Leftrightarrow \underline{\alpha = 2}.$$

□

24) $f(x) = -x^3 + x$ su $\mathbb{R}$; abbiamo $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} + o(\frac{x^3}{x^3})}{2} = \frac{1}{12}$

□

□

26) $f(x) = e^x$; quindi $f'(x) = f''(x) = e^x$. Il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato in $x_0 = 2$, è dato da $P_2(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{f^{(k)}(2)}{k!} (x-2)^k = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2$, ossia $\underline{P_2(x) = e^2 [1 + (x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2]}$.

□

27) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$: basta osservare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$; quindi non è soddisfatta la cond. nec. per la convergenza. Essendo una serie a termini positivi possiamo concludere che la serie diverge positivamente.

□

28) $\int x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} [\sin x^2] + c, c \in \mathbb{R}.$

□

29) $\int_0^1 \frac{\arctan \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}} dx$: $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $f(x) > 0$; $f(x) \sim \frac{\sqrt[3]{x}}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{x^{\alpha+2/3}}$ per $x \rightarrow 0^+$

Poiché $\int_0^1 \frac{1}{x^\beta} dx < +\infty \Leftrightarrow \beta < 1$, per il criterio del confronto asintotico l'integrale

improprio dato è convergente se $\underline{0 \leq \alpha < \frac{1}{3}}$.

□

30) $y'(x) = -\frac{1}{3} y(x) \Leftrightarrow \underline{y(x) = c e^{-\frac{1}{3}x}}, c \in \mathbb{R}; (su \mathbb{R}).$

■

b1) i) $f(x) = \begin{cases} 1 + \arctg(x^2 - \alpha x) & \text{se } x \leq 0 \\ \alpha e^{3x} - \beta \log(1+x) & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$

La funzione f è continua in $x_0 = 0 \iff \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$\iff \lim_{x \rightarrow 0^-} [1 + \arctg(x^2 - \alpha x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\alpha e^{3x} - \beta \log(1+x)] = f(0) = 1$

$\iff \underline{\underline{\alpha = 1}}.$

Quindi $f(x) = \begin{cases} 1 + \arctg(x^2 - x) & \text{se } x \leq 0 \\ e^{3x} - \beta \log(1+x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$ è continua in $x_0 = 0$.

Osserviamo che $f'(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{1+(x^2-x)^2} & \text{se } x < 0 \\ 3e^{3x} - \frac{\beta}{1+x} & \text{se } x > 0. \end{cases}$

Poiché f è continua in $x_0 = 0$ e derivabile $\forall x \neq 0$, dal corollario del teorema di de l'Hôpital segue che $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{2x-1}{1+(x^2-x)^2} \right] = -1$ e $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[3e^{3x} - \frac{\beta}{1+x} \right] = 3 - \beta$. Risulta quindi che f è derivabile in $x_0 = 0$ se e solo se $3 - \beta = -1$, ossia $\underline{\underline{\beta = 4}}$. $\square$

ii) a) Abbiamo quindi $f(x) = \begin{cases} 1 + \arctg(x^2 - x) & \text{se } x \leq 0 \\ e^{3x} - 4 \log(1+x) & \text{se } x > 0; \end{cases}$

per tale funzione si ha $\underline{\underline{f'(0) = f'_-(0) = f'_+(0) = -1}}$. $\square$

b) L'eq. della retta tg al grafico di f nel pt. di ascissa $x_0 = 0$ è data da

$y = f(0) + f'(0)(x-0)$, ossia $\underline{\underline{y = 1 - x}}$. $\square$

c) $\int_0^1 (e^{3x} - f(x)) dx = \int_0^1 4 \log(1+x) dx = 4 \int_0^1 \log(1+x) dx$: oss. che
 $\int \log(1+x) dx = \int 1 \cdot \log(1+x) dx = x \log(1+x) - \int \frac{x}{1+x} dx = x \log(1+x) - \int \frac{x+1-1}{x+1} dx$
 $= x \log(1+x) - x + \log(1+x) + c = (x+1) \log(1+x) - x + c$, $c \in \mathbb{R}$; abbiamo
 dunque $\int_0^1 (e^{3x} - f(x)) dx = 4 \left[(x+1) \log(1+x) - x \right]_0^1 = \underline{\underline{4 [2(\log 2) - 1]}}$ $\blacksquare$

b2) i) $f(x) = (-x + |x-1|) e^{-x^2}$
 $= \begin{cases} (-2x+1) e^{-x^2} & \text{se } x < 1 \\ -e^{-x^2} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• segno $\begin{array}{ccccccc} + & + & + & + & - & - & - \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 & & \end{array} \rightarrow f$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y=0$ è asintoto orizzontale per f per $x \rightarrow \begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}$
- f continua su $\mathbb{R}$;
- $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ con

$$f'(x) = \begin{cases} -2e^{-x^2} + (-2x+1)(-2x)e^{-x^2} & \text{se } x < 1 \\ +2xe^{-x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (4x^2 - 2x - 2)e^{-x^2} & \text{se } x < 1 \\ 2xe^{-x^2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Controlliamo la derivabilità in $x=1$. Poiché f è continua in $x=1$ e f è derivabile $\forall x \neq 1$, dal corollario del teorema di de L'Hôpital segue che $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = (4-4)e^{-1} = 0$ e $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2e^{-1}$.
Risulta quindi che f non è derivabile in $x=1$; inoltre $(1, f(1)) = (1, -e^{-1}) = (1, -\frac{1}{e})$ è un pt. angoloso per f .

Oss. infine che $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 2 = 0$ (per $x < 1$)

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{8} = \frac{2 \pm 6}{8} = \begin{cases} 1 & \text{(da scartare)} \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$x = -\frac{1}{2}$ pt. di max. loc. stretto per f

$$\underline{f(-\frac{1}{2}) = 2e^{-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\sqrt{e}} \quad (\sim 1.6)}$$

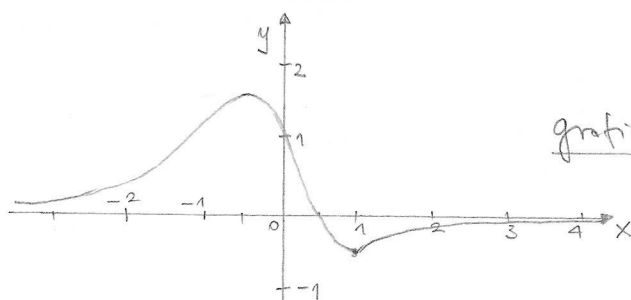
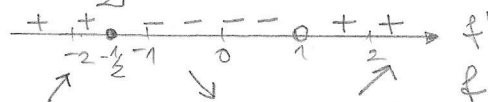


grafico qualitativo di f .

$$\text{ii) } \int_1^{+\infty} x f(x) dx = \int_1^{+\infty} -x e^{-x^2} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_1^M -x e^{-x^2} dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-x^2}}{2} \right]_1^M = \frac{-e^{-1}}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2e}}}$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$

(per calcolarlo usiamo gli sviluppi di Taylor)

b3) i) Bisogna moltiplicare il numeratore almeno fino al terzo ordine;

ricordiamo che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \rightarrow 0$, $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)$

per $t \rightarrow 0$, $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$; otteniamo

$$e^{x^2} - \cos \sqrt{2}x - 2 \log^2(1+x) = \cancel{1} + x^2 + o(x^3) - \cancel{1} + \frac{2x^2}{2} + o(x^3) - 2\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2$$

$$= 2x^2 + o(x^3) - 2(x^2 - x^3 + o(x^3)) = 2x^3 + o(x^3) \text{ per } x \rightarrow 0$$

Quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2} - \cos \sqrt{2}x - 2 \log^2(1+x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3 + o(x^3)}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \frac{o(x^3)}{x^3}}{1} = \underline{\underline{2}}.$$

□

Il limite in
presenta nella
forma indeterminata
 $\left[\frac{0}{0}\right]$

(per determinarlo
usiamo il teorema
di de l'Hôpital)

ii) Osserviamo che grazie al teorema fondamentale del calcolo si ha

$$\frac{\left(\int_0^x (e^{t^2} - \cos \sqrt{2}t - 2 \log^2(1+t)) dt\right)'}{(x^4)'} = \frac{e^{x^2} - \cos \sqrt{2}x - 2 \log^2(1+x)}{4x^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

grazie a i). Applicando il teorema di de l'Hôpital si conclude che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x (e^{t^2} - \cos \sqrt{2}t - 2 \log^2(1+t)) dt}{x^4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

■

b) i) Abbiamo $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha+2}} - \frac{1}{n^{3/2}} \right).$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$, otteniamo immediatamente che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\alpha+2}} - \frac{1}{n^{3/2}} \right) = \begin{cases} \text{convergente} & \Leftrightarrow \alpha+2 > 1 \\ \text{divergente positivamente} & \Leftrightarrow \alpha+2 \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \text{convergente} & \Leftrightarrow \alpha > -1 \\ \text{divergente positivamente} & \Leftrightarrow \alpha \leq -1. \end{cases} \quad \square$$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} (x-1)^n$: notiamo che $\sqrt[n]{\frac{1}{n^{2\alpha}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, quindi il raggio di convergenza è dato da $\underline{\underline{r=1}}$.

Possiamo dunque dire che la serie data è sicuramente convergente $\forall x \in]1-r, 1+r[=]0, 2[$, $\forall \alpha \geq 0$.

Se $\underline{x=0}$, la serie risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2\alpha}}$, che è convergente grazie al criterio di Leibniz $\forall \alpha > 0$ (per $\alpha=0$, la serie è irregolare);

se $\underline{x=2}$, la serie risulta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ che è convergente se e solo se

$\underline{x=2}$ $\alpha > \frac{1}{2}$. Quindi l'intervallo di convergenza della serie di potenze data è $\underline{E=[0, 2]}$ se $\alpha > \frac{1}{2}$, $\underline{E=[0, 2[}$ se $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, e $\underline{E=[0, 2]}$ se $\alpha=0$.

■

b5) Osserviamo che $\left(\frac{1}{4}\right)^x = x^3 + 2$ ammette una soluzione nell'intervallo $[-1, 0]$ se e solo se $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - x^3 - 2$ ammette uno zero in $[-1, 0]$.
 f è continua in $[-1, 0]$ e $f(-1) = 4 + 1 - 2 = 3$, $f(0) = 1 - 2 = -1$. Quindi per il teorema di Jensen degli zeri $\exists$ un $x_0 \in]-1, 0[: f(x_0) = 0$.
 Tale x_0 è unico, poiché f è strett. decrescente in $[-1, 0]$ (somma di 2 funzioni strett. decrescenti, oppure $f'(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \log\left(\frac{1}{4}\right) - 3x^2 < 0$ in $[-1, 0]$). Determiniamo $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ mediante il metodo di bisezione.
 Notiamo che il pt. medio di $[-1, 0]$ è $c_0 = -\frac{1}{2}$ e $f(-\frac{1}{2}) = \sqrt{4} + \frac{1}{8} - 2 = \frac{1}{8} (> 0)$. Quindi $x_0 \in]-\frac{1}{2}, 0[$. Il pt. medio di $]-\frac{1}{2}, 0[$ è $c_1 = -\frac{1}{4}$ e $f(-\frac{1}{4}) = \sqrt[4]{4} + \frac{1}{64} - 2 = \sqrt{2} + \frac{1}{64} - 2 < 0$. Ora basta porre $[\tilde{a}, \tilde{b}] = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$ e mi ha quanto richiesto. ■

b6) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$. □

ii) Enunciato e dimostrazione del criterio della radice n-esima per serie a termini positivi.